

جامعة دمشق

كليّة العلوم

قسم الرّياضيّات

حل معادلات ماكسويل باستخدام

طريقة العناصر المنتهية

Maxwell's Equation by Using

Finite Element Method

رسالة أُعدّت لنيل درجة الماجستير في الرّياضيات

إعداد الطّالبة :

ندى محمّد محفوظ السيّد حسَن

بإشراف الدّكتورة :

برلنت صبري مطيط

1430هـ - 2009 م

بسم الله الرحمن الرحيم

وَمَن يَتَّقِ اللَّهَ يَجْعَل لَّهُ مَخْرَجاً ﴿ ٢ ﴾

وَيَرْزُقْهُ مِنْ حَيْثُ لَا يَحْتَسِبُ وَمَن يَتَوَكَّلْ عَلَى اللَّهِ فَهُوَ حَسْبُهُ إِنَّ اللَّهَ بَالِغُ أَمْرِهِ قَدْ جَعَلَ اللَّهُ لِكُلِّ شَيْءٍ قَدْراً ﴿ ٣ ﴾

سورة الطّلاق

إهداء

إلى الكلمة الصّادقة في قاموس وجودي

والدّعوة المباركة التي أظلّتني في مسيرتي

إلى من أدين لهما بالفضل ما حييت

والِدَيّ

إلى من اختلطت دمائي بدمائهم فشاركوني أفراحي وأحزاني

وعرفت بينهم سرّ سعادتي وهنائي

أخوتي

إلى من قلّبت معهم صفحات كتبي ودفاتري

وقضيت بصحبتهم أجمل أيّام حياتي

صديقاتي

..كلمة شكر..

بدأت رسالتي بفضل من الله ورعاية، وخططت فصولها وحروفها بتوفيق منه وهداية، فله الحمد تعالى حين البدء وفي كلّ حالٍ حتى النهاية

لا يسعني في هذه اللّحظة وقد وفقني الله لإتمام هذا العمل إلا أن أرفع أسمى آيات الشكر والعرفان:

إلى من أغنتني بسعة علمها وتعهدتني بوافر نصحها وأعطتني جلّ وقتها...

إلى من أوقدت في داخلي روح العزيمة والإصرار...

الدّكتورة: برلنت صبري مطيط

إلى الذين يؤدّون دوراً هامّاً في نجاح هذا العمل...

إلى الذين شُرّفت بهم أعضاءً في لجنة التحكيم والمناقشة...

الأستاذ الدّكتور: محمد صبح — رئيس قسم الرّياضيات في جامعة دمشق

الأستاذ الدّكتور: خالد حلاوة — الباحث في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

إلى من حملوا للعلم رايةً فلم يتوَانَوا لحظةً عن تقديم النصح والإرشاد والمعونة...

الأستاذ الدّكتور: محمَّد سمارة (دكتور في الهندسة المدنية جامعة دمشق)

الدّكتورة: غَادة جوجة (دكتورة في التحليل الدّالي جامعة دمشق)

الدّكتورة: جِنان الدّباغ (دكتورة في الفيزياء)

الدّكتور: نضال شمعون (الباحث في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا)

إلى الرّوضة الغنّاء التي زكت بأطيب العلوم وأحلاها، ففاضت بكل الخير والعطاء...

السّادة أعضاء الهَيئة التدريسيّة في قسم الرّياضيات

تمهيد

يُوجد عدد كبير من المسائل الفيزيائية والهندسيّة التي لا يمكن التعبير عن حلولها بعباراتٍ تحليليةٍ بسيطة، هذا ما دفع الكثيرين للبحث عن طرق عددية تُعطي حلولاً تقريبية ملائمة لمثل هذه المسائل، فكان من أهمّ هذه الطرق طريقتا الفروق المنتهية والعناصر المنتهية.

نقدّم في أطروحتنا دراسةً لمعادلات تُعتبر محوراً أساسيّاً في حياتنا اليومية وهي معادلات ماكسويل التي تُعنى بدراسة المسائل الكهرطيسيّة، واخترنا لإتمام ذلك طريقة العناصر المنتهية التي تميّزت عن غيرها من الطرق بأنّها استطاعت معالجة المسائل الهندسيّة المعقّدة، حيث سمحت بتجزئة المنطقة المدروسة إلى عناصر ذات أشكالٍ مختلفة، كما ساعدت في معالجة المسائل ذات الشّروط الحدّيّة المختلفة، واخترنا لتمثيل حلول معادلات ماكسويل نوعين من دوال القاعدة وهما دوال قاعدة العقد ودوال قاعدة الأضلاع، وقد وجدنا أنّ التّعامل مع دوال القاعدة باستخدام جملة الإحداثيات المعمّمة غالباً ما يكون صعباً، لذا قمنا بعرض خوارزميٍّ توضّح كيفية الانتقال من جملة الإحداثيات المعمّمة إلى جملة الإحداثيّات الطبيعية وبالعكس، واستخدمنا في برمجة هذه الخوارزميّات وتوضيحها برنامج ***Mathematica*** **[19],[20]**.

مخطط الأطروحة

نخصّص أطروحتنا هذه للبحث عن حلٍّ عددي لمعادلات ماكسويل باستخدام طريقة العناصر المنتهية، ونعرض دراستنا هذه وفق المخطط الآتي:

نعرض في الفصل الأوّل لمحةً تاريخيةً موجزةً عن نشوء معادلات ماكسويل، وأهمّ المراحل التي مرّت بها طريقة العناصر المنتهية إلى أن تمّ توظيفها في حلّ هذه المعادلات مع ذكر لأهم الأسماء التي برزت في هذا المجال حتّى وقتنا الرّاهن.

أمّا الفصل الثاني فيتضمّن دراسة مرجعيّة نُركّز من خلالها على محورين أساسيّين:
نتناول في أولهما تعريفاً بمعادلات ماكسويل وبعض المؤثرات الشعاعيّة، ثمّ يليها شرح لكيفية الحصول على معادلة الموجة انطلاقاً من معادلات ماكسويل.
في حين نُخصّص المحور الآخر للحديث عن بعض مفاهيم التحليل الدّالي كفضاءات الجداء الدّاخلي وفضاءات هلبرت وسوبوليف، كما نستعرض مبرهنة لاكس ميلغرام ومبرهنة الأثر التي تُعتبر تعميماً لمفهوم الحلّ المستمر على محيط المنطقة المدروسة، ونعرض بالإضافة إلى ذلك مبرهنات أخرى تدرس مسألة وجود ووحدانية حل بعض المسائل التغييرية التي نصادفها خلال الفصول اللاحقة.

نقوم في الفصل الثّالث بشرح أهمّ الأمور المتعلّقة بالعناصر ودوال الشّكل المرتبطة بها، إذ نوضّح من خلال هذا الفصل مفهوم العنصر المنتهي والمبادئ الأساسيّة التي ترتكز عليها عمليّة تجزئة المنطقة من ترقيمٍ موضعيّ ومعمّم، والشروط التي يجب أن تحققها الدّوال المستخدمة في التقريب، هذا بالإضافة لعرض للجمل الإحداثية المختلفة التي سنستخدمها خلال دراستنا (معممة وموضعيّة وطبيعية)،
ونستعرض فيما بعد دوال القاعدة التي تنقسم إلى قسمين هما: دوال قاعدة العقد ودوال قاعدة الأضلاع، وبما أنّ التعامل مع دوال قاعدة الأضلاع في جملة الإحداثيّات المعممة غالباً ما يكون صعباً، فإنّنا قمنا بتقديم بحثٍ وضّحنا من خلاله كيفية الانتقال من دوال قاعدة الأضلاع في جملة الإحداثيات المعممة إلى جملة الإحداثيّات الطبيعية وبالعكس، وذلك وفق خوارزميّات قمنا بشرحها وصياغة برامج مناسبة لها باستخدام لغة ***Mathematica***.

في مقدمة الفصل الرابع نذكر بعض الأشكال التي تأخذها معادلة الموجة الناتجة عن معادلات ماكسويل في **(1-D)**، يليها توضيح لمفهوم طريقة الباقي الموزون، ومن ثمّ شرح تفصيلي لحل معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية في **(1-D)** وذلك من أجل شروط حدّيّة مختلفة مفروضة عليها، كما نرفق كلّ حالة بأمثلة توضيحية، و نستخدم في حلّ هذه الأمثلة خوارزميّات نقوم ببرمجتها باستخدام برنامج ***Mathematica***.

ومن ثمّ نعرض في الفصل الخامس بعض الأشكال التي يمكن أن تأخذها معادلة الموجة الناتجة عن معادلات ماكسويل في **(2-D)**، وبعد إيجاد الشّكل الضّعيف لهذه المعادلة نُدرج الخطوات الأخرى لإيجاد حلٍ لمثل هذه المعادلة، ثمّ يلي ذلك بعض الأمثلة التي توضّح خطوات الدّراسة السّابقة وذلك باستخدام كلٍ من العناصر المثلثية والمستطيلة، ونميّز في دراستنا هذه نوعين من دوال القاعدة هما دوال قاعدة العقد ودوال قاعدة الأضلاع، وأمّا من النّاحية البرمجية فنقوم بتعديل الخوارزميّات والبرامج الموجودة في الفصل الرّابع (حالة **(1-D)**) لتلائم دراستنا لحل معادلات ماكسويل في **(2-D)**.

وأخيراً نقوم بتوسيع دائرة البحث لتشمل حلولاً لمعادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية في **(3-D)**، حيث نُوجد الشّكل الضّعيف لمعادلة الموجة الناتجة عن المعادلات آنفة الذكر، ثمّ نناقش حلّ هذه المعادلة باستخدام دوال قاعدة الأضلاع من أجل كلٍّ من العناصر رباعيّة الوجوه ومتوازية المستطيلات، ونُرفق هذا الحل بأمثلة توضيحيّة كما في الفصلين السابقين، وننوّه إلى أنّنا نقتصر في هذا الفصل على دوال قاعدة الأضلاع لأنّ دوال قاعدة العقد غالباً ما تؤدي في مثل هذه الحالات إلى ما يُعرف باسم الحلول الزّائفة.

الفصل الأوّل

المقدّمة



James Clerk Maxwell (1831- 1879):

" لقد أُسّست جميع العلوم الرياضية بناءً على علاقات بين قوانين الفيزياء وقوانين الأعداد، لذا فإن الهدف الأساسي لأي علم حقيقي هو إعادة المسائل الطبيعية إلى عملية تحديد الكميات من خلال العمليات على الأعداد"

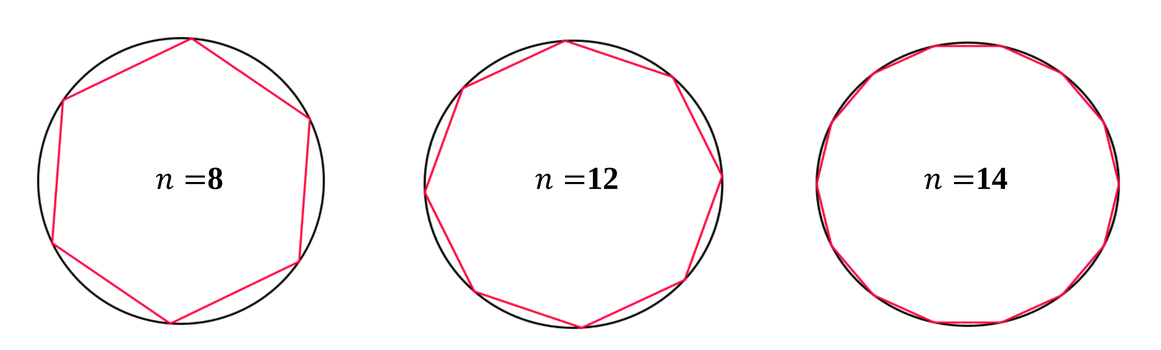
1-1. نشوء معادلات ماكسويل:

تُعتبر الظواهر الكهرطيسيّة من المسائل التي استغرقت وقتاً طويلاً حتى رأت النور، وفي الحقيقة يُعزى ذلك بشكل أساسيّ إلى أنّ المقادير الكهرطيسيّة هي مقادير غير مرئية وغير ملموسة. وعلى الرغم من أنّ كثيراً من الأسس الكهرطيسيّة كانت قد عرفت من قبل علماء سبقوا ماكسويل مثل **Ampere, Gauss, Faraday, Lenz** وآخرون، إلا أنّ هذا العالم استطاع وبذكائه الحاد إضافة عنصر جديد لقانون آمبير عام 1862، فاستطاع من خلال هذا العنصر وصف المسائل الكهرطيسيّة باستخدام جملة مؤلفة من أربع معادلات عُرفت باسمه(معادلات ماكسويل)، وكان لهذه المعادلات أثر كبير في وصف كثير من الظواهر الكهرطيسيّة.

وعلى الرغم من أنّ المفاهيم الكهرطيسيّة قد تبدو بسيطة، إلا أنّ المسائل المتعلقة بها تكون غايةً في الصعوبة والتعقيد، خصوصاً في حالات المسائل غير الخطيّة أو المسائل التي يكون الحقل فيها متولّداً عن مصادر مختلفة، ففي مثل هذه الحالات تكون عمليّة إيجاد حلول تحليلية عمليّة صعبة جداً، لذا كان لابدّ من البحث عن طرق عددية تُلبّي هذه الحاجات وتذلّل هذه العقبات، فوُجدت طرقٌ عديدة كان من أبرزها طريقة العناصر المنتهية.

1-2. نشوء طريقة العناصر المنتهية:

لقد كان الظهور الأول لاسم طريقة العناصر المنتهية عام **1960** من خلال مقالة بارزة قدمها **Clough** في تحليل مسائل المرونة المستوية الخطيّة، إلا أنّ فكرة تحليل العناصر المنتهية تعود إلى فترة أبعد من ذلك ، فيعتبر البعض أنّ فكرة تقريب مساحة الدائرة عن طريق حساب مساحة مضلّع مرسوم على محيطها كانت اللّبنة الأولى في بناء طريقة العناصر المنتهية الشّكل(1−1).



الشّكل (1−1) تقريب محيط الدائرة باستخدام المضلعات

من أسس طريقة العناصر المنتهية **(FEM)** ؟ ومتى أُسّست ؟

سؤالان يحتملان ثلاثة أجوبة مختلفة، حيث أنّ التحديد فيما إذا كان مؤسس هذه الطّريقة عالماً في الرّياضيّات التطبيقية، أو مهندساً، أو عالم فيزياء، ليس بالأمر السهل، إذ أنّ كلاً من هؤلاء لديه تبريرٌ كافٍ للادّعاء بأنّ هذه الطّريقة كانت من إنجازه، حيث أنّ كلاً منهم طوّر هذه الطّريقة بشكلٍ مستقلٍ، وبأوقاتٍ مختلفةٍ ، ولأسبابٍ مختلفةٍ أيضاً.

فقد ركّز الرياضيون على مسائل القيم الحديّة في الميكانيك المستمر، وبشكل خاص أرادوا إيجاد تقريب للحدين الأدنى والأعلى في القيم الذاتية .

بينما اهتمّ الفيزيائيون في حلّ المسائل المستمرة، فالتمسوا وسائل للحصول على دوال تقريب قطعية لتمثيل الدوال المستمرة.

أمّا المهندسون فقد اتّجهوا للبحث عن معاملات تأثير الصّلابة (**stiffness**) نظراً لتزايد المسائل المعقدة في بنية السفن والطائرات.

ظهر أوّل استخدام لدالة مستمرة قطعياً ومُعرّفة على مناطق مثلثيّة في الرّياضيات التطبيقية من خلال محاضرة للعالم **Richard Courant** (1888−1972) عام 1943، حيث استخدم **Courant** تجميع العناصر المثلثيّة ومبدأ الطاقة الكامنة الأصغرية لدراسة مسألة التواء **St .Venant**.

استنتج **Turner** عام 1956 مصفوفات الصّلابة من أجل البنى الشبكية، وفي عام 1959استخلص **Greenstadt** ومن خلال مناقشة وُجدت في كتابٍ ألّفه **Feshback** و**Morse** عام 1953 بعنوان(طرق الفيزياء النظرية) (***Methods of theoretical Physics***) طريقة تقطيع تتضمن خلايا "بدلاً من النقاط" أي أنه تصوّر منطقة الحل مقسّمة إلى مجموعة من الخلايا الجزئية المستمرة، فوضّح بطريقته هذه إجرائية تمثيل الدّالة المجهولة على شكل متسلسلة من الدّوال كل منها مرتبطة بخليّة، وبعد وضعه لدِوال التّقريب، استخدم شروط الاستمراريّة للرّبط بين معادلات جميع الخلايا ، وبهذا ردَّ المسألة المستمرة إلى مسألة متقطّعة، فأصبح من الممكن استخدام شبكات ذات خلايا غير منتظمة الشّكل.

في الوقت الذي بدأت فيه طريقة العناصر المنتهية بالتّطور بين فئات المهندسين والفيزيائيين، اهتمّ الرياضيون في إعطاء أساسٍ رياضيٍ راسخٍ لهذه الطّريقة، فأُجريت دراسات عديدة لتقدير أخطاء التقطيع، ونسب التقارب، وركّزت هذه الدّراسات بشكل أساسيّ على مسائل القيم الحديّة الناقصّية الخطيّة، وفي أواخر الستينات بدأت تتصاعد محاضرات **FEM** أكثر من أي وقت مضى.

أمّا على الصعيد الفيزيائي ، فقد قام **Prager** و **John Synge** (1897− 1995) بتطوير طريقة **(hyper circle)** والتي كانت قد تطورت أصلاً مع نظرية المرونة الكلاسيكية، مما جعلها قابلة للتطبيق في حل المسائل المستمرة، كما هو الحال في طريقة العناصر المنتهية.

أدرك **Hrenikoff** أنه يُمكن التغلب على صعوبة حل مسائل البنية المرنة المستمرة من خلال تقسيم المنطقة المستمرة إلى عناصر تتقاطع بعدد منته من النقاط، ولاقت محاولات **Hrenikoff** في تطبيق طريقته المسماة (***Frame-work method***) عام1941 نجاحاً كبيراً، فنمت بذلك بذرة لطريقة العناصر المنتهية في الميكانيك المستمر.

قدم **Newmark & McHenry** بعد ذلك بقليل تطويراً آخر لفكرة التقطيع ، بينما درس **Korn** الخواص التبولوجية للجملة المتقطعة ، ثم تبع ذلك عشر سنوات من الخمول، انتهت عام 1954عندما بدأ **Argyris**وأصدقاؤه بطباعة مقالات تغطي وبشكل واسع التحليل البنيوي الخطي .

هذا ولقد تم تقديم الحل الفعلي لمسائل المرونة المستوية بواسطة عناصر مثلثيّة حددت خواصها من معادلات نظرية المرونة الموجودة في مقالة كتبها **(Clough, Turner, Martin, Topp)**عام1956، فكانوا أول من قدم ما يعرف اليوم باسم **(direct stiffness method)** لتحديد خواص العناصر المنتهية، فساهمت دراستهم هذه وبمساعدة الحواسيب الرّقمية التي طُوّرت آنذاك في تمهيد الطريق نحو حل مسائل المرونة المستوية المعقدّة .

بدأ المهندسون يدركون كفاءة طريقة العناصر المنتهية بعد الإجراءات العديدة التي أجراها **Clough** على مسائل المرونة المستوية عام 1960، وزاد الاهتمام بهذه الطّريقة عندما صرح **Cheung** و **Zienkiewicz** عام 1965عن إمكانية تطبيقها في جميع مسائل الحقل الممكن ردّها إلى الشّكل المتحولي (**variational form**)، وطُبع لهما أول كتاب في العناصر المنتهية عام 1967.

في نهاية الستينات وبداية السبعينات لاقت **FEM** انتشاراً واسعاً تجلى في آلاف المقالات و مئات المؤتمرات والكتب العديدة التي ظهرت حينذاك والتي لا تزال في تصاعد مستمر حتى الآن.

1-3. تطبيق طريقة العناصر المنتهية على معادلات ماكسويل:

لم تتأخّر معادلات ماكسويل عن غيرها من المعادلات في استخدام طريقة العناصر المنتهية كطريقة فعّالة في إيجاد حلول تقريبة لها، ولعلّ ذلك يعود في المرتبة الأولى إلى صعوبة حلها بطرائق أخرى. فحيث كان أول ظهور لمفهوم العناصر المنتهية عام 1960، نشر **Silvester** عام 1969 أول بحث يتضمن شرحاً لتحليل الدليل الموجي المتجانس بطريقة العناصر المنتهية، توالت أبحاثه فيما بعد في هذا الموضوع وكان من جملة ما نشره بحث مع صديقه **G.Pelosi** عام 1994 بعنوان طريقة العناصر المنتهية في الموجة الكهرطيسيّة.

وهكذا بقيت طريقة العناصر المنتهية حتى الثمانينات مقتصرة على استخدام دوال قاعدة العقد المعتمدة على نشر الدّالة المطلوبة بدلالة قيمها عند عقد العناصر، فكانت هذه الطّريقة فعّالة وتعطي حلولاً مستقرة من أجل المقادير السلّمية كما في حالة الكمونات المستقرة(السّاكنة)، أو عند دراسة إحدى مركبات الحقل كما في انتشار دليل موجي متجانس في **(2-D)**، أمّا عندما يكون الدليل الموجي غير متجانس فيصبح الأمر أكثر تعقيداً، إذ أنه يستلزم التعامل مع معادلات الموجة الشّعاعيّة حيث يكون استخدام دوال قاعدة العقد أمر غير ملائم.

في عام 1980 قدم **Jean Nédélec** بحثاً بعنوان طريقة العناصر المنتهية المختلطة بيّن من خلاله وجود عائلتين جديدتين من عناصر الأضلاع والوجوه، كما نشر عام 1986 بحثاً آخر بعنوان أسرة جديدة من العناصر المنتهية المختلطة، ولازال **Nédélec** حتى اليوم يقدم إسهامّات جديدة من أبرزها دراسة للمعادلات الصوتية والكهرطيسيّة عام 2001.

لمع في هذا المجال نخبةٌ من الرياضيين المعاصرين الذين سطروا صفحات لامعة في استخدام طريقة العناصر المنتهية لحلّ معادلات ماكسويل، فقدموا ولا يزالون أبحاثاً قيّمة في هذا المجال نذكر منهم على سبيل المثال لا الحصر **John L. Volakis** الذي قدّم إسهاماتٍ كثيرة كان من بينها كتاب بعنوان طريقة

العناصر المنتهية في الكهرطيسيّة عام 1998 ، كما ظهر له كتابان حديثان كان إحداهما عام 2006 بعنوان:

"Frequency Domain Hybrid Finite Element Methods for Electromagnetics"

كما كان آخر بحث نشر له عام 2007 بعنوان هندسة الهوائيات.

أمّا **Peter Monk** فقد نشر كتاباً يعتبر من أروع الكتب التي قَدّمت دراسة تحليلية لحل معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية عام 2003.

قدّم **Davit Harutynyan** عام 2007 أطروحته التي درس فيها طريقة العناصر المنتهية التكيفية الشّعاعيّة في حل معادلات ماكسويل.

ومؤخراً قام **Gerard Meunier** عام 2008 بنشر كتاب شرح فيه طريقة العناصر المنتهية في التطبيقات ذات الترددات المنخفضة بعنوان:

"Multigrid Finite Element Methods For Electromagnetic Field Modeling"

وهكذا نجد وفي كل يوم فكرة تبرز هنا وأخرى هناك تضفي إلى هذه الدّراسة أسهماً جديدة تزيد من أهميتها في مجالات الدّراسة المختلفة.

الفصل الثـاني

دراسة مرجعيّة في معادلات ماكسويل

والفضاءات الملائمة لحلّها

لا بدّ لنا وقبل الحديث عن حل معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية من دراسة مرجعيّة تتضمّن بعض المفاهيم الأساسيّة التي تتمحور في قسمين أساسيّين:

القسم الأول: نتحدث فيه عن شكل معادلات ماكسويل ودلالات رموزها، وكيفيّة الحصول على معادلة الموجة انطلاقاً من تلك المعادلات، ومن ثمّ الشروط الحديّة التي يجب أن تتحقّق على السطوح الدّاخليّة للمنطقة المدروسة.

القسم الثاني: يتضمّن دراسة لبعض المفاهيم الأساسيّة في التحليل الدّالي، مثل فضاء هلبرت، وفضاء التوزيع، وفضاءات سوبوليف، ومن ثمّ بعض المبرهنات الضرورية في مسألة وجود حل وحيد لمعادلات ماكسويل.

2-1. معادلات ماكسويل:

تحتلُّ معادلات ماكسويل مكانة هامَّة في ميدان العلوم الفيزيائيّة والهندسيّة، ويُعزى ذلك بشكلٍ أساسي إلى أنّها تعطينا وصفاً دقيقاً لسلوك الحقلين الكهربائي والمغناطيسي اللذين أصبحا ضرورة ملحَّة في وقتنا الراهن لدرجة أصبح بإمكاننا من خلالها القول أن لا شيء يتحرك اليوم دون وجود لأثرٍ كهربائي أو مغناطيسي في حركته، وحيث لا يخفى على أحد منّا أهميّة الكهرطيسيّة في حياتنا فلن نسهب في الحديث عنها بل ننطلق للحديث عن شكل معادلات ماكسويل وتعريف أهم المقادير الكهرطيسيّة فيها، وذلك بعد عرض بسيط لأهم المشتقّات الشّعاعيّة التي سنحتاج إليها كثيراً في دراستنا.

2-1-1. الاشتقاق الشّعاعيّ [1]:

تعريف(2-1) (المؤثر نبلا (∇)):

المؤثّر نبلا هو شعاع، يأخذ في جملة الإحداثيات الديكارتية الشّكل التّالي:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}$$

حيث أنّ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ أشعة واحدات المحاور الدّيكارتية المتعامدة.

يُعتبر المؤثر ∇ مؤثرا رياضياً لا يحمل أيّ معنى فيزيائي، إلا أنّ أهميته تبرز عندما يؤثّر على مقادير أخرى سلّميّة كانت أو شعاعيّة.

تعريف(2−2) (التدرّج والتباعد والدوران):

لتكن U(x, y, z) دالّة سلّميّة مشتقاتها الجزئية من المرتبة الأولى ($\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}$) غير معدومة، وليكن $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)$ شعاعاً تتبع مركباته الثلاث للمتغيرات **x, y, z**.

عندئذٍ يُمكن تطبيق المؤثّر $\vec{\nabla}$ على الشّعاع $\vec{A}$ والدّالة **U** كما يلي:

$$\nabla\begin{cases}\vec{A}\begin{cases}\text{جداء سلمي} \quad : \nabla.\vec{A}=div\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\\ \text{جداء شعاعيّ} : \quad \nabla\times\vec{A}=rot\vec{A}=det\begin{bmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{bmatrix}\end{cases}\\ U \ \text{سلمي} \quad (\text{الجداء})\nabla U=gradU=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\end{cases}$$

مبرهنة ستوكس(2−1) (Stokes' theorem):

إذا كان تدفق الشّعاع $\vec{B}$ مصوناً أي $\nabla.\vec{B}=0$ عندئذٍ يُوجد شعاع $\vec{A}$ يحقق ما يلي:

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

نتيجة(2−1):

نجد من المبرهنة السّابقة أنّ: $\nabla.\left(\nabla\times\vec{A}\right)=0$ من أجل أي شعاع $\vec{A}$.

2−1−2. معادلات ماكسويل المرتبطة بالزمن [1,5,15]:

تُعطى معادلات ماكسويل في جملة مؤلفة من أربع قوانين هي:

قانون آمبير: $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ ...(1−2)

قانون غاوص المغناطيسي: $\nabla.\vec{B}=0$ ...(2−2)

قانون فاراداي: $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ ...(3−2)

قانون غاوص الكهربائي: $\nabla.\vec{D}=\hat{\rho}$ ...(4−2)

حيث أنّ:

$\vec{E}$: شدّة التيار الكهربائي. $\vec{D}$: كثافة التّدفق الكهربائي (التحريض الكهربائي).

$\vec{H}$: شدّة الحقل المغناطيسي. $\vec{B}$: كثافة التّدفق المغناطيسي (التحريض المغناطيسي).

$\vec{J}$: كثافة التيار الكهربائي. $\hat{\rho}$: كثافة الشّحنة الكهربائية.

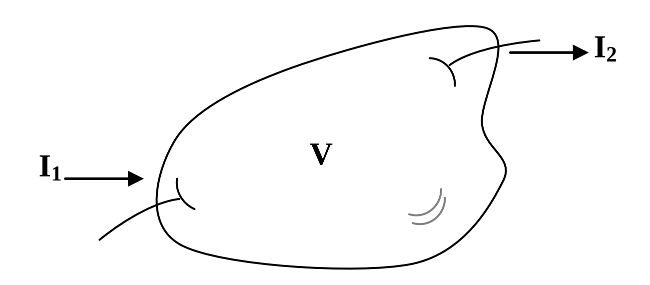
كما يُمكن استنتاج علاقة خامسة من العلاقات السّابقة تُدعى معادلة الاستمرار الكهربائي، وذلك بأخذ تباعد طرفي العلاقة (2−1):

$$\nabla.\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla.\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla.\vec{D} \qquad (5-2)...$$

لكن: $\nabla.\left(\nabla\times\vec{H}\right)=0$ ، وبالاستفادة من العلاقة(2−4) نجد أنّ:

$$\nabla.\vec{J}=-\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}$$

فإذا كان: $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}=0$ نجد $\nabla.\vec{J}=0$ وهذا يدل على مبدأ مصونية تدفق الشّعاع $\vec{J}$ والذي ينص على أنّ التيار الكهربائي الداخل إلى منطقة ما يساوي التيار الكهربائي الخارج منها.



الشّكل(2−1) (مبدأ مصونية تدفق شعاع)

2−1−3. معادلات ماكسويل المتوافقة زمنياً (*Time- harmonic Maxwell's equations*)[15,16] :

نقول عن معادلات ماكسويل إنّها متوافقة زمنياً إذا درسنا انتشار الحقول الكهرطيسيّة خلال دور واحد، وبشكل عام يرتبط الحقل الكهربائي المتوافق مع الزمن $\vec{E}$ مع الحقل الكهربائي المرتبط بالزمن $\vec{\hat{E}}$ وفق العلاقة:

$$\vec{\hat{E}}(x,y,z,t)=Re\left[\vec{E}(x,y,z)e^{iwt}\right]$$
$$=E_{x_0}\cos(wt+\emptyset_x)\,\vec{i}+E_{y_0}\cos\left(wt+\emptyset_y\right)\vec{j}+E_{z_0}\cos(wt+\emptyset_z)\vec{k}$$

حيث أنّ:

$$\vec{E}(x,y,z)=E_{x_0}e^{i\emptyset_x}\vec{i}+E_{y_0}e^{i\emptyset_y}\vec{j}+E_{z_0}e^{i\emptyset_z}\vec{k}$$

و **[ ]Re**: دالة الجزء الحقيقي للمقدار الموجود بين قوسين، و $i^2=-1$.

وكذلك من أجل المقادير الأخرى:

$$\vec{\hat{D}}(x,y,z,t)=Re\left[\vec{D}(x,y,z)e^{iwt}\right] \qquad \vec{\hat{B}}(x,y,z,t)=Re\left[\vec{B}(x,y,z)e^{iwt}\right]$$
$$\vec{\hat{J}}(x,y,z,t)=Re\left[\vec{J}(x,y,z)e^{iwt}\right] \qquad \hat{\rho}(x,y,z,t)=Re\left[\rho(x,y,z)e^{iwt}\right]$$
$$\vec{\hat{H}}(x,y,z,t)=Re\left[\vec{H}(x,y,z)e^{iwt}\right]$$

نبدّل في معادلات ماكسويل فنحصل على معادلات ماكسويل المتوافقة زمنياً التّالية:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + iw\vec{D} = \vec{J} + iw\varepsilon\vec{E} \quad (6-2)...$$

$$\nabla \times \vec{E} = -iw\vec{B} = -iw\mu\vec{H} \quad (7-2)...$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \quad (8-2)...$$

$$\nabla . \vec{D} = \rho \quad (9-2)...$$

إذ ترتبط الأشعة $\vec{D}, \vec{B}, \vec{J}$ مع الشّعاعيّن $\vec{H}, \vec{E}$ بالعلاقات التّالية:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \quad (10-2)...$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \quad (11-2)...$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (12-2)...$$

حيث: ε_0: السماحية الكهربائية للفضاء الحر وتساوي: $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{12}$.

μ_0: النّفاذية المغناطيسيّة للفضاء الحر $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$.

ε_r: السّماحية الكهربائية للوسط.

μ_r: النّفاذية المغناطيسية للوسط.

σ : النّاقلية الكهربائية.

وتختلف المقادير $\varepsilon_r, \mu_r, \sigma$ تبعاً للوسط المدروس و نميّز هنا ثلاث حالاتٍ:

a. الفضاء الحرّ (الخلاء) ***Vacuum***:

تكون في هذه الحالة $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ وبالتّالي: $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ ، $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$.

أمّا الناقلية الكهربائية فتكون معدومة أي: $\sigma = 0$.

وتُعطى سرعة انتشار الضوء في الخلاء c_0 بالعلاقة:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 2.998 \times 10^8$$

b. الأوساط متماثلة المناحي وغير المتجانسة ***(Inhomogeneous Isotropic Materials)***:

نقول عن الوسط إنه غير متجانس إذا وُجد داخل الحقل الكهرطيسي مواد مختلفة، فإذا كانت خواص المادة لا تعتمد على اتجاه الحقل دعوناه وسطاً خطياً وتحققت فيه العلاقات:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \text{ ،} \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

حيث أنّ ε, μ دوال سلّميّة موجبة ومحدودة تابعة للموضع.

c. الأوساط غير متماثلة المناحي وغير المتجانسة (***Inhomogeneous Unisotropic Materials***):

نقول عن الوسط إنه غير متماثل المناحي إذا اختلفت السماحيّة ε والنفاذيّة μ تبعاً لاتجاهات الحقول الكهرطيسيّة المختلفة، وفي هذه الحالة تكون ε,μ دوالاً مصفوفية محددة موجبة تابعة لإحداثيات الفضاء.

2-1-4. الاستقرار الكهربائي (*Electrostatic*) [1,5,15]:

تكون المقادير في حالتي الاستقرار الكهربائي أو المغناطيسي مستقلة عن الزمن وبالتّالي تعطى المعادلات المعبّرة عن المسائل المستقرّة كهربائياً بالشّكل:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad ...(13-2)$$

$$\nabla . \vec{D} = \rho \quad ...(14-2)$$

بالإضافة إلى علاقة الارتباط:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad ...(15-2)$$

2-1-4-1. معادلة لابلاس وبواسّون في الأوساط العازلة:

بما أنّ $\nabla \times \vec{E} = 0$، فهذا يعني أنّ الحقل $\vec{E}$ يُمكن أن يكون مُشتقاً من كمون، أي يُمكن التعبير عن الحقل الكهربائي على شكل تدرّج دالة سلّمية $\boldsymbol{V}$:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad ...(16-2)$$

نبدّل العلاقة(2−15) في العلاقة(2−14): $\nabla . \varepsilon \vec{E} = \rho$

ومن العلاقة(2−16) نجد: $\nabla . \varepsilon(-\nabla V) = \rho$

وهذه الأخيرة ما هي إلا معادلة بواسّون التي يُمكن كتابتها بشكلٍ أكثر تفصيلاً:

$$\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} = -\rho$$

فإذا كانت كثافة الشحنة ρ معدومة حققت الدّالة $\boldsymbol{V}$ معادلة لابلاس:

$$\nabla . \varepsilon(-\nabla V) = 0$$

2-1-4-2. معادلة لابلاس في الأوساط الناقلة:

نستخدم في هذه الحالة معادلة الاستمرار الكهربائي: $\nabla . \vec{J} = 0$.

لكن $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ، و $\vec{E} = -\nabla V$ ومنه: $\nabla . \vec{J} = \nabla . \sigma \vec{E} = -\nabla . \sigma(\nabla V) = 0$

أو بشكلٍ آخر: $\frac{\partial}{\partial x}\sigma\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ وهي معادلة لابلاس.

2–1–5. الاستقرار المغناطيسي (*Magnetostatic*) [1,5,15]:

تُعطى المعادلات المعبّرة عن المسائل المستقرّة مغناطيسياً بالشّكل:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \qquad (17\text{–}2)...$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \qquad (18\text{–}2)...$$

وعلاقة الارتباط:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (19\text{–}2)...$$

إذا كانت الناقلية الكهربائية معدومة عندئذٍ يكون $\vec{J} = \sigma \vec{E} = 0$ ومنه $\nabla \times \vec{H} = 0$ ، وبالتّالي يُمكن أن نكتب $\vec{H} = -\nabla V$، حيث **V** دالّة سلّمية وأخيراً بالاستفادة من العلاقة (19) نجد أنّ:

$$\nabla . \vec{B} = \nabla . \mu \vec{H}$$

وبالتّالي يُمكن اشتقاق معادلة لابلاس:

$$\nabla . \mu(-\nabla V) = 0 \qquad (20\text{–}2)...$$

2–1–6. معادلة الموجة [4,15]:

يُمكن دمج المعادلتين(2–6) و(2–7) في معادلة شعاعيّة تفاضليّة واحدة من المرتبة الثانية بالمجهول $\vec{\mathrm{E}}$ أو المجهول $\vec{\mathrm{H}}$ تُدعى بمعادلة الموجة، وذلك وفق الخطوات التّالية:

نجد من المعادلة (2–7) أنّ:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -iw\mu(\nabla \times \vec{H})$$

وبالاستفادة من العلاقة (2–6) نجد:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -iw\mu(\vec{J} + iw\varepsilon\vec{E}) = -iw\mu\vec{J} + w^2\mu\varepsilon\vec{E}$$

ومنه:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r}(\nabla \times \vec{E}) = -iw\mu_0\vec{J} + w^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

$$\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \nabla \times \vec{E} - {k_0}^2\varepsilon_r\vec{E} = -ik_0Z_0\vec{J} \qquad (21\text{–}2)...$$

حيث أنّ: k_0 : طول موجة الفضاء الحرّ وتُعطى بالعلاقة: $k_0 = w\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Z_0 : ممانعة الفضاء الحرّ وتُعطى بالعلاقة: $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$.

بالاستفادة من المساواة **[1]**: $\nabla^2\vec{\mathrm{A}} = \nabla(\nabla.\vec{\mathrm{A}}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A}$

وبفرض أنّ: $\vec{J} = 0$ نحصل على معادلة الموجة بشكلها المختصر:

$$\nabla^2\vec{E} - k^2\vec{E} = 0 \qquad (22\text{–}2)...$$

حيث أنّ ∇^2 هو مؤثّر لابلاس الشّعاعيّ الذي يُمكن كتابته بالشّكل:

$$\nabla^2\vec{E} = \nabla^2E_x\,\vec{\imath} + \nabla^2E_y\,\vec{\jmath} + \nabla^2E_z\,\vec{k}$$

و

$$\nabla^2E_x = \frac{\partial^2E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}$$
$$\nabla^2 E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

وتُكتب المعادلة الشّعاعيّة (2−22) على شكل ثلاث معادلات سلّمية تكون المتغيرات فيها هي مركبات الحقل $\vec{E}$ ولكل منها شكل معادلة هيلمولتز (معادلة الموجة السلّمية) التّالية:

$$\nabla^2 \varphi - k^2 \varphi = 0 \qquad (23-2)...$$

حيث أنّ: φ هي إحدى المركبات: E_x, E_y, E_z.

وبشكل مماثل تماماً يُمكن استنتاج معادلة الموجة من أجل الحقل المغناطيسي المعطاة بالعلاقة:

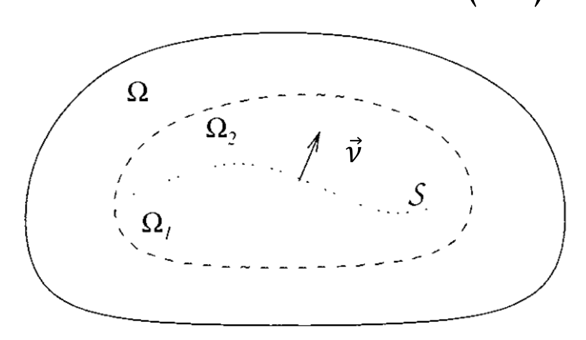
$$\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \nabla \times \vec{H} - {k_0}^2 \mu_r \vec{H} = -\left(\frac{\nabla \times \vec{J}}{\varepsilon_r}\right) \qquad (24-2)...$$

حيث أنّ: $Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$.

كما يُمكن استنتاج معادلة هيلمولتز من أجل مركبات الحقل المغناطيسي بطريقة مماثلة أيضاً.

2−1−7. الشّروط الحديّة على السّطوح الدّاخليّة [4,14]:

ليكن S السّطح الدّاخلي الذي يفصل بين المنطقتين الجزئيتين Ω_2, Ω_1 من منطقة Ω لكلٍ منهما خواص محددة كما في الشّكل(2−2):



الشّكل(2−2) (شعاع واحدة الناظم عند السطح الداخلي لمنطقة)

وبفرض $\vec{\nu}$ شعاع واحدة الناظم على السطح S موجّه من المنطقة Ω_1 إلى المنطقة Ω_2، وبفرض ε_i و μ_i تدلان على سماحية ونفاذية المنطقة Ω_i، عندئذٍ لا بدّ من أن تكون المركبة المماسيّة للحقل الكهربائي مستمرة أي:

$$(\vec{E_1} - \vec{E_2}) \times \vec{\nu} = 0 \quad on\ S \qquad (25-2)...$$

أمّا المركبة النّاظمية لكثافة التّدفق الكهربائي $\vec{D}$ فهي غير مستمرّة بل لها قفزات مساوية لكثافة الشّحنة الكهربائية السطحيّة σ .

$$(\varepsilon_1 \vec{E_1} - \varepsilon_2 \vec{E_2}) . \vec{\nu} = \sigma \quad on\ S \qquad (26-2)...$$

كذلك يجب أن تكون المركبة الناظمية لكثافة التّدفق المغناطيسي $\vec{B}$ مستمرة على السطح **S** أمّا المركبة المماسيّة للحقل المغناطيسي $\vec{H}$ فهي غير مستمرّة بل يُمكن التعبير عنها بالعلاقة:

$$(\overrightarrow{H_1} - \overrightarrow{H_2}) \times \vec{v} = \overrightarrow{J_s} \qquad on\ S \qquad (27-2)...$$

$$(\mu_1 \overrightarrow{H_1} - \mu_2 \overrightarrow{H_2}).\vec{v} = 0 \qquad on\ S \qquad (28-2)...$$

حيث أنّ $\overrightarrow{J_s}$ هي كثافة التيار السطحي.

2-2. مبادئ أساسيّة في التحليل الدّالي:

نُقدّم في هذا الجزء من بحثنا بعض التعاريف الأساسيّة التي لا غنى عنها في تحديد الفضاءات الملائمة التي سنبني عليها دراستنا، كما نذكر إضافةً إلى ذلك مبرهنات عديدة نحدد من خلالها الشروط اللازمة لوجود حل وحيد لمعادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية.

2-2-1. فضاء الجداء الداخلي وفضاء هلبرت [4,8,10,14]:

تعريف(2-3):

ليكن χ فضاء متجهياً فوق حقل الأعداد العقدية،عندئذٍ يُعرّف الجداء الداخلي على χ بأنّه تطبيق:

$$(.,.): \chi \times \chi \to \mathbb{C}$$

يحقق الشروط التّالية أياً كانت $u, v, w \in \chi$ & $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

1. $(u, u) = 0 \iff u = 0$

2. $(u, v) = \overline{(v, u)}$

3. $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$

ويحدّد الجداء الداخلي على χ نظيماً على χ معرفاً بالمساواة:

$$\| \phi \| = \sqrt{(\phi, \phi)} \qquad \forall \phi \in \chi$$

كما ويحقق متراجحة المثلث: $\phi, \xi \in \chi \quad \| \phi + \xi \| \leq \| \phi \| + \| \xi \|$ ...(29-2)

تعريف(2-4):

ليكن χ فضاءً متجهياً مزوداً بالجداء الداخلي $(\cdot,\cdot)$، عندئذٍ ندعو هذا الفضاء بفضاء هلبرت إذا كان تاماً بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|$.

وتتحقق في فضاءات هلبرت χ متراجحتان أساسيتان:

A. متراجحة كوشي شفارتز **(Cauchy Schwarz)** :

$$|(u, v)| \leq \| u \| . \| v \| \qquad \forall u, v \in \chi \qquad (30-2)...$$

B. متراجحة المتوسط الهندسي الحسابي **(Arithmatic-geometric mean inequality):**

$$|(u, v)| \leq \frac{\delta}{2} \| u \|^2 + \frac{1}{2\delta} \| v \|^2 \qquad \forall u, v \in \chi, \delta > 0 \qquad (31-2)...$$

2-2-1-1. التقارب القوي(التقارب بالنظيم) والتقارب الضّعيف [10,14]:

تعريف(2-5):

نقول عن المتتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \chi$ إنَّها متقاربة بقوة من الدّالة $u \in \chi$ إذا تحقق:

$$lim_{n\to\infty} \parallel u - u_n \parallel = 0$$

وندعو هذا التقارب أحياناً بالتقارب بالنظيم.

تعريف(2-6):

تكون المتتالية $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \chi$ متقاربة بضعف من الدّالة $v \in \chi$ إذا تحقق:

$$(v_n, \phi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (v, \phi) \quad \forall \phi \in \chi$$

تعريف (2-7):

المجموعة المغلقة: يُقال عن المجموعة الجزئية $\mathcal{U}$ من فضاء هلبرت χ إنّها مغلقة إذا حوت جميع نهايات المتتاليات المتقاربة في $\mathcal{U}$.

تعريف(2-8):

لصاقة مجموعة: ندعو مجموعة كل نهايات المتتاليات الجزئية المتقاربة بقوة في $\mathcal{U}$ بلصاقة $\mathcal{U}$ في χ و نرمز لها بالرمز: $\boldsymbol{Closure}(\mathcal{U})$.

تعريف(2-9):

نقول عن المجموعة الجزئية $\mathcal{U} \subset \chi$ إنّها كثيفة في χ إذا تحقق: $\text{Closure}(\mathcal{U}) = \chi$.

إذا كانت Ω مجموعة جزئية مفتوحة من $\mathbb{R}^3$ عندئذٍ سنرمز للصاقتها بـــ $\bar{\Omega}$.

2-2-2. المؤثرات الخطيّة والمؤثرات الثنوية [10,14]:

تعريف(2-10):

يُدعى التطبيق $A : \chi \longrightarrow \gamma$ مؤثراً إذا كان كلٌّ من γ و χ فضاء متجهياً.

تعريف(2-11):

يُسمّى المؤثر $A : \chi \longrightarrow \gamma$ مؤثراً خطيّاً إذا تحقق:

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ , \ \forall u, v \in \chi$$

تعريف(2-12):

يُقال عن المؤثر الخطي $A : \chi \longrightarrow \gamma$ من فضاء منظم χ إلى فضاء منظم γ إنّه مؤثر خطي محدود إذا وجد عدد حقيقي c مستقل عن v يحقق:

$$\parallel Av \parallel_{\gamma} \leq c \parallel v \parallel_{\chi} \quad \forall v \in \chi$$

تعريف(2−13):

يُوصف المؤثر $A\ :\ \chi \rightarrow \gamma$ من فضاء منظم χ إلى فضاء منظم γ بأنّه مؤثر مستمر عند نقطة $v_0 \in \chi$ إذا حقق ما يلي: $\forall \varepsilon > 0, \forall v \in \chi \quad \exists \delta > 0\ ;\ \| v - v_0 \| < \delta : \| Av - Av_0 \| < \varepsilon$.

ونقول عن المؤثر A إنّه مؤثر مستمر إذا كان مستمراً عند أي نقطة $v \in \chi$.

تعريف(2−14):

ليكن $A: \chi \rightarrow \gamma$ مؤثراً خطياً من فضاء هلبرت χ إلى فضاء هلبرت γ عندئذٍ يُقال عن هذا المؤثّر إنه متراص إذا كانت صورة المجموعات المحدودة في χ مجموعات متراصة نسبياً في γ (أي لصاقتها متراصة في γ).

مبرهنة(2−2):

إذا كان $A\ :\ \chi \rightarrow \gamma$ مؤثراً خطياً من فضاء منظم χ إلى فضاء منظم γ عندئذٍ يكون:

A مستمر $\Leftrightarrow$ A محدود

تعريف(2−15):

من أجل $A\ :\ \chi \rightarrow \gamma$ مؤثر خطي محدود من فضاء منظم χ إلى فضاء منظم γ، يُعطى نظيم A بالعلاقة:

$$\| A \|_{\chi \rightarrow \gamma} = \sup_{v \neq 0, v \in \chi} \frac{\|Av\|_{\gamma}}{\|v\|_{\chi}}$$

أو بالعلاقة:

$$\| A \|_{\chi \rightarrow \gamma} = \sup_{\|v\|=1, v \in \chi} \| Av \|_{\gamma}$$

تعريف(2−16):

ليكن χ فضاء هلبرت، يُعرَّف فضاء هلبرت الثنوي $\chi^{`}$ للفضاء $\chi$ بأنه فضاء الدوال الخطيّة المحدودة على $\chi$ . ويُعطى نظيم $f \in \chi^{`}$ بالعلاقة:

$$\| f \|_{\chi^{`}} = \sup_{v \neq 0, v \in \chi} \frac{|f(v)|}{\|v\|_{\chi}}$$

2−2−3. وجود ووحدانية حل المسائل التغييرية (*Variational Problems*):

لدى حل مسألةٍ ما بطريقة العناصر المنتهية لا بدّ في بداية الحل من أن نوجد الشّكل التغييري لهذه المسألة ويتمّ ذلك باستخدام طريقة كالاركين التي سنأتي على شرحها لاحقاً، ولكنّ السّؤال الذي يطرح نفسه هنا هل نضمن بعد هذا التغيير وجود حل وحيد للمسألة الناتجة؟

نستعرض فيما يأتي الشروط الواجب تحققها لوجود مثل هذا الحل في مبرهنة تُعرِف باسم لاكس−ميلغرام، لكن قبل ذلك نعرض مجموعة من التعاريف الأساسيّة **[4,10,14]**.

تعريف(2−17):

ليكن χ فضاء هلبرت، عندئذٍ يكون للدّالة: $a(\cdot,\cdot): \chi \times \chi \longrightarrow \mathbb{R}$ شكلاً ثنائي الخطيّة إذا حققت الشروط التّالية:

a. $a(\alpha_1 u + \alpha_2 v, \phi) = \alpha_1 a(u,\phi) + \alpha_2 a(v,\phi) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \gamma, u, v \in \chi$

b. $a(u, \beta_1 \phi + \beta_2 \varphi) = \beta_1\, a(u,\phi) + \beta_2 a(u,\varphi) \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \phi, \varphi, u \in \chi$

تعريف(2−18):

من أجل χ فضاء هلبرت، نقول عن الشّكل ثنائي الخطيّة:

$$a(\cdot,\cdot): \chi \times \chi \longrightarrow \mathbb{R}$$

إنّه متناظر إذا تحقق:

$$a(u,\phi) = a(\phi,u) \qquad \forall u, \phi \in \chi \qquad \text{(32−2)...}$$

تعريف(2−19):

يُقال عن الشّكل ثنائي الخطيّة:

$$a(\cdot,\cdot): \chi \times \chi \longrightarrow \mathbb{R}$$

حيث χ فضاء هلبرت إنَّه محدود إذا وجد ثابت ***c*** مستقل عن $u \in \chi$ وعن $\phi \in \chi$ يحقق:

$$|a(u,\phi)| \leq c \parallel u \parallel_\chi . \parallel \phi \parallel_\chi \qquad \forall u, \phi \in \chi \qquad \text{(33−2)...}$$

تعريف(2−20):

يكون الشّكل ثنائي الخطيّة $a(\cdot,\cdot): \chi \times \chi \longrightarrow \mathbb{R}$ (حيث χ فضاء هلبرت) شكلاً قسرياً (***coercive***) إذا وجد ثابت $\alpha > \mathbf{0}$ مستقل عن $u \in \chi$ بحيث يحقق:

$$|a(u,u)| \geq \alpha \parallel u \parallel_\chi^2 \qquad \forall u \in \chi \qquad \text{(34−2)...}$$

توطئة(2−3) (توطئة لاكس- ميلغرام (*Lax- Milgram*)) [5,10,14]:

ليكن $a(\cdot,\cdot): \chi \times \chi \longrightarrow \mathbb{R}$ شكلاً متناظراً محدوداً قسرياً ثنائي الخطيّة ، عندئذٍ من أجل كل $f \in \chi'$ يوجد حل وحيد $u \in \chi$ للمسألة التغييرية:

$$a(u,\phi) = f(\phi) \quad \forall \phi \in \chi \qquad \text{(35−2)...}$$

ويحقق: $\parallel u \parallel_\chi \leq {}^{c}/_{\alpha} \parallel f \parallel_{\chi'}$

حيث أن ***c*** **,** α هما الثابتان المذكوران في تعريف المحدوديّة والقسريّة أعلاه.

2-2-4. نظرية تقارب طريقة كالاركين:

بفرض أن $\{\chi_h\}_{h>0}$ متتالية من الفضاءات الجزئية منتهية البعد من فضاء هلبرت، وتمثّل هذه المتتالية في طريقة العناصر المنتهية فضاءات العناصر المنتهية، و h هي القطر الأعظمي للعناصر في الشبكة المدروسة عندئذٍ يُمكن صياغة المسألة التّالية:

توطئة(2−4) (*Cea's Lemma*) [4,10,14]:

لنفرض أن $\chi_h \subset \chi \;; h > 0$ أسرة من الفضاءات الجزئية منتهية البعد من فضاء هلبرت χ، وأن $a\colon \chi \times \chi \longrightarrow \mathbb{R}$ شكل متناظر محدود قسري ثنائي الخطيّة، عندئذٍ من أجل $f \in \hat{\chi}$ يوجد حل وحيد $u_h \in \chi_h$ للمسألة:

$$a(u_h, \phi_h) = f(\phi_h) \quad \forall \phi_h \in \chi_h \qquad (36\text{−}2)\ldots$$

وإذا كان $u \in \chi$ هو الحل الفعلي للمسألة(2−35) فعندئذٍ يوجد ثابت c مستقل عن كلٍ من h و u و u_h بحيث:

$$\| u - u_h \|_\chi \leq \frac{c}{\alpha} \inf_{\phi_h \in \chi_h} \| u - \phi_h \|_\chi \qquad (37\text{−}2)\ldots$$

مبرهنة(2−5) [4,14]:

لتكن $\chi_1 \subset \chi_2 \subset \cdots \chi$ أسرة من الفضاءات الجزئية منتهية البعد من فضاء هلبرت χ بحيث تحقق $\overline{\bigcup_{h=1}^{\infty} \chi_h} = \chi$، وليكن $a\colon \chi \times \chi \longrightarrow \mathbb{R}$ شكلاً متناظراً محدوداً قسرياً ثنائي الخطيّة، و $f \in \hat{\chi}$.
عندئذٍ يكون:

$$lim_{n\to\infty} \| u - u_h \|_\chi = 0$$

وهذا يعني أن طريقة كالاركين متقاربة من أجل المسألة(2−35).

2-2-5. فضاءات سوبوليف (*Sobolev Spaces*):

من أجل $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$; **N=1,2,3** نُعرّف ما يلي:

2-2-5-1. تعاريف ومصطلحات [4,10,14]:

$\boldsymbol{C^k(\Omega)}$: مجموعة الدوال المستمرة وجميع مشتقاتها الجزئية حتى المرتبة $\boldsymbol{k}$.

$\boldsymbol{C^k(\overline{\Omega})}$: مجموعة الدوال $\emptyset \in C^k$ والتي تملك مشتقات محدودة ومستمرة بانتظام حتى المرتبة $\boldsymbol{k}$ على $\overline{\Omega}$.

$\boldsymbol{C_0^k(\Omega)}$: مجموعة الدوال $\phi \in C^k(\Omega)$ والتي تملك دعامة متراصة في Ω .

دعامة تابع: ليكن ϕ تابعاً حقيقياً أو عقدياً، مُعرّفاً ومستمراً على مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$ حيث $N \le 3$ عندئذٍ ندعو لصاقة المجموعة: $\{x : \quad \phi(x) \neq 0\}$ بدعامة ϕ، ونكتب:

$$Supp\ \phi = \overline{\{x\ ; \quad \phi(x) \neq 0\}}$$

الفضاء $L^p(\Omega)$ $1 \le p \le \infty$:

i. عندما $p = \infty$:

يُدعى الفضاء $L^\infty(\Omega)$ بفضاء الدوال المحدودة أساسيّاً، ويُقال عن دالة محدودة $f(x)$ إنّها محدودة أساسياً إذا وُجد ثابت k بحيث: $f(x) \le k$ تقريباً في كل مكان على Ω، وهوفضاء منظّم حيث يُعرّف النّظيم فيه بالعلاقة:

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x\in\Omega}{ess\ Sup}|u(x)|$$

ii. من أجل $1 \le p < \infty$

يُعرّف الفضاء $L^p(\Omega)$ بأنّه مجموعة الدوال ϕ المعرفة على Ω والتي يكون لأجلها:

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} < \infty$$

حيث أنّ: $\| u \|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^p\ dx)^{\frac{1}{p}} \qquad ; 1 \le p < \infty$

وفي حالة خاصّة عندما **p=2** نحصل على مجموعة الدوال القابلة للمكاملة تربيعياً على Ω.

مبرهنة(2−6):

إنَّ $L^p(\Omega)$ هو فضاء باناخ مزود بالنظيم:

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^p\ dx)^{\frac{1}{p}} \qquad ; 1 \le p < \infty$$

$$\| u \|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x\in\Omega}{ess\ Sup}|u(x)| \qquad ; p \to \infty$$

وتتحقق في الفضاء L^p متراجحتان أساسيتان:

A. متراجحة هولدر:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة، و $1 \le p, q < \infty$ بحيث أنّ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، عندئذٍ من أجل $u \in L^p(\Omega)$ و $v \in L^q(\Omega)$ يكون:

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\ dx \le \| u \|_{L^p(\Omega)} \| v \|_{L^q(\Omega)} \qquad ...(38-2)$$

B. متراجحة مينكوفيسكي:

من أجل أي $u, v \in L^p(\Omega)$ حيث $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة و $1 \le p, q < \infty$ يكون:

$$\| u + v \|_{L^p(\Omega)} \le \| u \|_{L^p(\Omega)} + \| v \|_{L^p(\Omega)} \qquad ...(39-2)$$

2-2-5-2. فضاء التوزيعات والمشتق الضّعيف [4,8,10,14]:

نصادف غالباً بعض المسائل الفيزيائية التي لا يُمكن وصفها رياضياً باستخدام المفهوم التقليدي للتابع، مثل كثافة النقطة المادية وكثافة الشحنات النقطية سواء الكهربائية منها أو المغناطيسية وغيرها من الظواهر الفيزيائية. مما استدعى إيجاد أداة رياضية جديدة، تقتضي تعميم التابع وتلبي هذه الحاجة الفيزيائية، فكانت هذه الأداة هي ما يُعرف اليوم بمفهوم التابع المعمم أو التوزيع.

تاريخياً: إنَّ أول من أدخل مفهوم التابع المعمم هو ديراك **(*Dirac*)**، وفي عام 1936 صاغ سوبوليف **(*Sobolev*)** الأسس الرياضية النظرية لنظرية التوابع المعمّمة، ثم قام شفارتز **(*Schwarz*)** من بعده وفي الفترة ما بين 1950−1951 بصياغة هذه الأسس، ومن ثمّ تطورت هذه النظرية بسرعة كبيرة لتواكب المتطلبات الفيزيائية الرياضية، وبشكل خاص المعادلات التّفاضليّة ونظرية الحقل الكوانتية.

تعريف(2−21) (ترميز الدليل المضاعف (*multi- index*) القياسي للمشتقات):

إذا كانت $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \dots \dots, \alpha_N)^T \in \mathbb{Z}_+^N$ ، حيث $\mathbb{Z}_+$ مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة، و $|\alpha|_1 = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|$، عندئذٍ من أجل أي $\phi \in C^{|\alpha|_1}(\Omega)$ نُعرِّف:

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{|\alpha|_1} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \dots \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

تعريف(2−22) (فضاء التوزيع $\boldsymbol{C_0^\infty(\Omega)}$):

بفرض Ω مجموعة جزئية مفتوحة من $\mathbb{R}^N$، نُعرِّف فضاء التوزيع $C_0^\infty(\Omega)$ بأنّه فضاء الدوال القابلة للمفاضلة عدداً غير منته من المرّات على Ω والتي تملك دعامة متراصة في Ω (ونرمز له أحياناً بالرمز $D(\Omega)$).

مبرهنة(2−7):

لتكن Ω مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$، و $f \in C^m(\Omega)$، و α دليل مضاعف يحقق: $|\alpha|_1 \le m$

عندئذٍ يكون: $\int_\Omega D^\alpha f \, \varphi d\boldsymbol{x} = (-1)^{|\alpha|_1} \int_\Omega f \, D^\alpha \varphi d\boldsymbol{x} \quad \forall \, \varphi \in D(\Omega)$

تعريف(2−23) (فضاء الدوال القابلة للمكاملة موضعياً):

نُعرّف مجموعة الدوال القابلة للمكاملة موضعياً حتى المرتبة $1 \le p < \infty$ على المنطقة المفتوحة $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ بالعلاقة:

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{ f \ ; \ f \in L^p(K) \quad \forall \text{ متراصة } K \subset \Omega \ \}$$

ونرمز لفضاء الدوال القابلة للمكاملة موضعيّاً حتى المرتبة $\boldsymbol{p}$ على Ω بالرمز $L_{loc}^p(\Omega)$.

توطئة التغيير المعمّمة (2−8) [14] :

لتكن $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ و Ω مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$، عندئذٍ إذا تحقق:

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in D(\Omega)$$

كانت $f = 0$ تقريباً في كل مكان على Ω.

تعريف(2−24) (المشتق الضّعيف) [4,14]:

يُقال عن $D^{\alpha}_{w} f \in L^1_{loc}(\Omega)$ إنَّه مشتق ضعيف من المرتبة α للدالة $f \in L^1_{loc}(\Omega)$، حيث أنّ Ω مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$، إذا تحقق:

$$\int_{\Omega} D^{\alpha}_{w} f\ \varphi d\boldsymbol{x} = (-1)^{|\alpha|_1} \int_{\Omega} f\ D^{\alpha}\varphi d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \varphi \in D(\Omega)$$

توطئة(2−9) [14]:

لتكن Ω مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$، و$f \in C^m(\Omega)$ ، و α دليل مضاعف يحقق: $|\alpha|_1 \leq m$، عندئذٍ يكون المشتق المألوف من المرتبة α $(D^{\alpha} f)$ والمشتق الضّعيف من المرتبة α $(D^{\alpha}_{w} f)$ متطابقان.

تعريف(2−25) (فضاء سوبوليف) [10,14]:

بفرض أنّ Ω منطقة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$، و **s** عدد صحيح موجب، و $1 \leq p < \infty$ ، عندئذٍ يمكن تعريف فضاء سوبوليف بالشّكل:

$$W^{s,p}(\Omega) = \{\phi \in L^p(\Omega) \quad ; \ D^{\alpha}_{w}\phi \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha|_1 \leq s\}$$

مبرهنة(2−10) [8,10,14]:

من أجل Ω منطقة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$، و **s** عدد صحيح موجب، و $1 \leq p \leq \infty$ ، يكون فضاء سوبوليف $W^{s,p}(\Omega)$ هو فضاء باناخ مزوّد بالنظيم:

$$\| \phi \|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|_1 \leq s} \int_{\Omega} |D^{\alpha}_{w}\phi|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} \quad ; 1 \leq p < \infty$$

ونصف النظيم:

$$|\phi|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|_1 = s} \int_{\Omega} |D^{\alpha}_{w}\phi|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} \quad ; 1 \leq p < \infty$$

$$\| \phi \|_{W^{s,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|_1 \leq s} \| D^{\alpha}_{w}\phi \|_{L^{\infty}(\Omega)} \quad ; p \to \infty$$

ملاحظة(2−2):

إذا كانت Ω منطقة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$، و **s** عدد صحيح موجب، عندئذٍ يكون فضاء سوبوليف $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$ هو فضاء هلبرت مزوّد بالجداء الداخلي:

$$(f,g)|_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha|_1 \leq s} \int_{\Omega} (D^{\alpha} f)(D^{\alpha} g) d\boldsymbol{x} \quad \ldots(40-2)$$

تعريف(2−26) [10]:

يُوصف $\partial\Omega$ محيط المنطقة المحدودة Ω في $\mathbb{R}^{N}$ بأنّه مستمر بمفهوم ليبتشيز إذا تحقق ما يلي:

من أجل أي $x \in \partial\Omega$ توجد مجموعة مفتوحة $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{N}$ حيث $x \in \mathcal{O}$، وجملة إحداثيات متعامدة $\xi = (\xi_1, \dots\dots, \xi_N)$ تحقق الخواص التّالية:

i. يوجد $a \in \mathbb{R}^{N}$ بحيث:

$$\mathcal{O} = \{\xi \mid \; -a_j < \xi_j < a_j \; , \; 1 \le j \le N\}$$

ii. كما توجد دالة ليبتشيز $\emptyset$ معرفة على

$$\mathcal{O}` = \{\grave{\xi} \in \mathbb{R}^{N-1} \mid \; -a_j < \xi_j < a_j \; , \; 1 \le j \le N-1\}$$

تحقق: $|\emptyset(\grave{\xi})| \le \frac{a_N}{2} \quad \forall\, \xi` \in \mathcal{O}`$ وبحيث يكون:

$$\Omega \cap \mathcal{O} = \{\xi \quad ; \; \xi_N \le \emptyset(\xi`) \; ; \xi` \in \mathcal{O}`\}$$

$$\partial\Omega \cap \mathcal{O} = \{\xi \quad ; \; \xi_N = \emptyset(\xi`) \; ; \xi` \in \mathcal{O}`\}$$

ونقول عن منطقة Ω إنَّها منطقة ليبتشيز إذا كان محيطها مستمراً بمفهوم ليبتشيز.

مبرهنة(2−11) [10]:

لتكن Ω منطقة ليبتشيز محدودة في $\mathbb{R}^{N}$ وليكن $u \in W^{s,p}(\Omega)$ حيث $1 \le p < \infty$ عندئذٍ تُوجد متتالية $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\overline{\Omega})$ وتحقق:

$$lim_{n\to\infty} \| u - u_n \|_{W^{s,p}(\Omega)} = 0$$

أي أنّ الفضاء $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ كثيف في الفضاء $W^{s,p}(\Omega)$.

2−2−5−3. أثر فضاء سوبوليف:

نتعرض خلال دراستنا لحل معادلات تفاضليّة جزئية في ساحة Ω منتمية إلى فضاء الحلول (فضاء سوبوليف)، وبما أنَّ الحل ينبغي أنَّ يكون معرفاً على الحدود $\partial\Omega$ للساحة Ω أو على جزء منها، فإنَّه لا بد من إدخال مفهوم الأثر والذي يعتبر بحد ذاته تعميم لمفهوم الحل المستمر على حدود الساحة المدروسة، ونظراً لأنّ هذا الحل هو توزيع غير مستمر على حدود الساحة فإنَّ ذلك يقتضي تمديده بالاستمرار على الحدود، وهذا يُمكن أن تؤمّنه لنا مبرهنة الأثر.

ليكن $H_0^k(\Omega)$ فضاء جزئياً من $H^k(\Omega)$ مُعرفاً بالشّكل:

$$H_0^k(\Omega) = \{u \in H^k(\Omega) \; ; \; D^{\alpha}u = 0 \;\; on\, \partial\Omega \quad \forall |\alpha| < k\}$$

وبالتّالي فإنه من أجل $\boldsymbol{k}$ =**0** يكون:

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \; ; \; u = 0 \quad on\, \partial\Omega\}$$

تعريف(2−27) [8,10,14]:

ليكن$s \geq 0$، عندئذٍ نُعرّف $H^{-k}(\Omega)$ بأنه ثنوي الفضاء $H_0^k(\Omega)$.

وتتحقق في الفضاء $H^k(\Omega)$ متراجحة هامّة تعرف باسم:

متراجحة فريدرش− بونكاري **(Poincare'-Friedrichs' inequality) [4,8,14]** وتُعطى بالشّكل:

$$|u|_{H^k(\Omega)} \leq \| u \|_{H^k(\Omega)} \leq (1+C)^k |u|_{H^k(\Omega)} \quad \forall\, u \in H_0^k(\Omega) \qquad (41-2)\ldots$$

حيث أنّ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ منطقة محدودة من المكعب الذي طول ضلعه $\boldsymbol{C} > \mathbf{0}$ في الفضاء ذي البعد $\boldsymbol{N}$.

تعريف(2−28) [14]:

نُعرّف أثر دالّة $f \in W^{s,p}(\Omega)$ مستمرة على المحيط $\partial\Omega$ بدالة $\tilde{f}$ معرّفة على المحيط $\partial\Omega$ وتحقق:

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$$

مبرهنة(2−12) (مبرهنة الأثر) [14]:

لتكن$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ منطقة ليبتشيز محدودة و $1 \leq p < \infty$، عندئذٍ يُوجد مؤثر خطي مستمر:

$$\mathcal{T}: W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

يحقق:

1. $(\mathcal{T}f)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$.
2. يُوجد ثابت $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ بحيث: $\forall f \in W^{1,p}(\Omega) \quad \| \mathcal{T}f \|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \| f \|_{W^{1,p}(\Omega)}$
3. المؤثر $\mathcal{T}: W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ هو مؤثر متراص.

2−2−6. تعميم علاقات التكامل بالتجزئة:

مبرهنة(2−13) (مبرهنة غرين):

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ منطقة ليبتشيز محدودة، و $\boldsymbol{\nu}(x) = (\boldsymbol{\nu_1}, \boldsymbol{\nu_2}, \ldots, \boldsymbol{\nu_N})$ شعاع واحدة الناظم الخارجي للمحيط $\partial\Omega$، عندئذٍ يكون:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} uv\boldsymbol{\nu_i} d\boldsymbol{S} \quad \forall\, u, v \in H^1(\Omega) \qquad (42-2)\ldots$$

مبرهنة(2−14) (مبرهنة ستوكس):

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ منطقة ليبتشيز محدودة محيطها $\partial\Omega$.

عندئذٍ فإنّ أي حقل شعاعيّ أملس $w \in [C^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})]^N$ يحقق:

$$\int_\Omega \nabla . w(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} w(\boldsymbol{x}). \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{S} \qquad (43-2)\ldots$$

حيث أنّ $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ شعاع واحدة الناظم الخارجي للمحيط $\partial\Omega$.

مبرهنة(2−15):

لتكن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ منطقة ليبتشيز محدودة محيطها $\partial\Omega$، $\boldsymbol{\nu}$ شعاع واحدة الناظم الخارجي المرتبط بها عندئذٍ:

i. إذا كانت $v \in H^1(\Omega)$ و $u \in (H^1(\Omega))^3$ فإنّ:

$$\int_\Omega (\nabla . u)\, v\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega u . \nabla v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\nu} . u) v\, d\boldsymbol{S} \qquad (44-2)...$$

ii. وإذا كانت $u \in H^1(\Omega)$ و $v \in H^2(\Omega)$ عندئذٍ:

$$\int_\Omega u\, \Delta v\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, d\boldsymbol{S} \qquad (45-2)...$$

حيث: $\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \nabla v(\boldsymbol{x}) . \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$

2−2−7. الشّكل الضّعيف لبعض المسائل النموذجية:

2−2−7−1. النموذج الأول:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ منطقة ليبتشيز، ولنأخذ المعادلة التّفاضليّة الجزئيّة من المرتبة الثانية:

$$-\nabla . (p \nabla u) + qu = f \qquad in \;\; \Omega \qquad (46-2)$$

حيث أنّ:

$$q \geq 0 \;\; \& \;\; p \geq C_{min} > 0 \quad in \;\; \Omega \qquad (47-2)$$

سوف نُوجد الشّكل الضّعيف للمعادلة التّفاضليّة الجزئيّة (2−46)، وندرس وجود حلّ وحيد لها في شروط حديّة مختلفة وهي:

i. **شروط ديرخليه الحديّة *(Dirichlet Boundary Conditions)*:**

لتكن لدينا المعادلة التّفاضليّة والخاضعة لشروط ديرخليه الحديّة التّالية:

$$\begin{cases} -\nabla . (p \nabla u) + qu = f & in \;\; \Omega \\ u = 0 & on \;\; \partial\Omega \end{cases} \qquad (48-2)$$

ولنوجد الآن الشّكل الضّعيف لهذه المعادلة، ثمّ لنبحث في الشروط اللازمة لوجود حلّ وحيد لهذا الشّكل.

١. <u>الشّكل الضّعيف:</u>

يتمّ إيجاد الشّكل الضّعيف للمسألة(2−48)، وفق الخطوات التّالية:

- نضرب طرفي العلاقة بدالة الوزن $v \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$-\nabla . (p \nabla u) v + quv = fv$$

- نأخذ تكامل هذا المقدار على المنطقة Ω:

$$-\int_{\Omega}\nabla.(p\nabla u)v d\boldsymbol{x}+\int_{\Omega}quv d\boldsymbol{x}=\int_{\Omega}fv\, d\boldsymbol{x}$$

- نكامل الحدّ الأول من العلاقة الأخيرة باستخدام العلاقة (2−44) وذلك بغية خفض مرتبة المشتقات الموجودة في العبارة الأخيرة، وهنا تكمن الفائدة الرئيسية من استخدام دوال الوزن.

$$-\int_{\Omega}\nabla.(p\nabla u)v d\boldsymbol{x}=\int_{\Omega}p\nabla u.\nabla v d\boldsymbol{x}-\int_{\partial\Omega}(p\nabla u)v\, \boldsymbol{v}d\boldsymbol{S}$$

وبالاستفادة من كون $v=0$ على محيط المنطقة $\partial\Omega$ نجد أنّ:

$$\int_{\Omega}p\nabla u.\nabla v d\boldsymbol{x}+\int_{\Omega}quv d\boldsymbol{x}=\int_{\Omega}fv\, d\boldsymbol{x} \qquad (49\text{−}2)\ldots$$

- نبحث عن الفضاءات الأوسع التي تكون لأجلها التكاملات الموجودة في العبارة(2−49) محدودة، نلاحظ أنّ هذه التكاملات تكون محدودة إذا كانت:

$$f\in L^2(\Omega) \text{ و } u,v\in H_0^1(\Omega) \qquad (50\text{−}2)\ldots$$

وكذلك:

$$p(x),q(x)\in L^{\infty}(\Omega) \qquad (51\text{−}2)\ldots$$

وهكذا أصبح بالإمكان صياغة الحلّ الضّعيف للمسألة(2−48) بالشّكل التّالي:

من أجل $f\in L^2(\Omega)$ أوجد $u\in V=H_0^1(\Omega)$ والتي تحقق:

$$\int_{\Omega}p\nabla u.\nabla v d\boldsymbol{x}+\int_{\Omega}quv d\boldsymbol{x}=\int_{\Omega}fv\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall v\in V$$

أو بشكلٍ آخر:

من أجل $f\in L^2(\Omega)$ أوجد $u\in V=H_0^1(\Omega)$ التي يكون من أجلها:

$$a(u,v)=l(v) \qquad \forall v\in V=H_0^1(\Omega) \qquad (52\text{−}2)\ldots$$

حيث أنّ $a(u,v)$ شكل ثنائي الخطيّة متناظر مُعرّف وفق العلاقة:

$$a(.,.):V\times V\to\mathbb{R}$$
$$a(u,v)=\int_{\Omega}p\nabla u.\nabla v d\boldsymbol{x}+\int_{\Omega}quv d\boldsymbol{x}$$

أمّا $l(v)$ فهو شكل خطي معرّف على V بالعلاقة:

$$l(v)=\int_{\Omega}fv\, d\boldsymbol{x}$$

٢. وحدانيّة الحلّ:

يكون للشكل الضّعيف حلٌّ وحيد إذا تحققت شروط توطئة لاكس ميلغرام، إضافة إلى الشروط (2−47) وهذا ما سنوضحه من خلال التوطئة التّالية:

توطئة(2−16) [14]:

بفرض $p\geq C_{min}>0$ و $q\geq 0$ تقريباً في كلّ مكان في Ω، عندئذٍ يوجد حلّ وحيد $u\in H_0^1(\Omega)$ للمسألة(2−48).

الإثبات:

$a(.,.)$ محدود:

بما أنّ $p,q \in L^{\infty}(\Omega)$، يوجد $C_{max} < \infty$ بحيث يكون $|p|,|q| \leq C_{max}$ تقريباً في كلّ مكان في Ω، وبالتّالي يكون:

$$|a(u,v)| \leq \int_{\Omega}(p|\nabla u.\nabla v| + q|uv|)d\boldsymbol{x} \leq C_{max}\int_{\Omega}(|\nabla u.\nabla v| + |uv|)d\boldsymbol{x} \quad (53-2)...$$

وبما أنّ ∇uو$\nabla v \in (L^2(\Omega))^N$ فإنّنا نجد واعتماداً على متراجحة هولدر(2−38) أنّ:

$$\int_{\Omega}|\nabla u.\nabla v|d\boldsymbol{x} \leq \left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2 d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla v|^2 d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}} = |u|_{H^1(\Omega)}|v|_{H^1(\Omega)} \leq ||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \quad (54-2)...$$

وبشكلٍ مماثل نجد أنّ:

$$\int_{\Omega}|uv|d\boldsymbol{x} \leq \left(\int_{\Omega}u^2 d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}v^2 d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}} = |u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)} \leq ||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \quad (55-2)...$$

بالتبديل في(2−53) نجد أنّ:

$$|a(u,v)| \leq 2C_{max}||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}$$

وهذا يعني أنّ الشّكل ثنائي الخطيّة $a(.,.)$ محدود.

$a(.,.)$ قسري:

بما أنّ $p \geq C_{min} > 0$ وبالاستفادة من متراجحة بونكاري(2−41) نجد أنّ:

$$a(v,v) = \int_{\Omega}p(\nabla v)^2 + qv^2 d\boldsymbol{x} \geq \int_{\Omega}p(\nabla v)^2 d\boldsymbol{x}$$
$$\geq C_{min}\int_{\Omega}(\nabla v)^2 d\boldsymbol{x} = C_{min}|v|^2_{H^1(\Omega)} \geq C_{min}C^2||v||^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

وهكذا نجد أنّ $a(.,.)$ قسري.

وبالتّالي فإنّه وحسب توطئة لاكس ميلغرام نجد أنّه من أجل أي $f \in L^2(\Omega)$ يوجد حلٌّ وحيد $u \in H_0^1(\Omega)$ للمسألة(2−49).

ii. شروط ديرخليه الحديّة غير المتجانسة:

لتكن لدينا المعادلة التّفاضليّة والخاضعة لشروط ديرخليه الحديّة غير المتجانسة التّالية:

$$\begin{cases} -\nabla.(p\nabla u) + qu = f & in \ \Omega \\ u = g & on \ \partial\Omega \end{cases} \quad (56-2)$$

حيث أنّ: $g \in C(\partial\Omega)$.

لإيجاد الشّكل الضعّيف لهذه المسألة نفرض وجود دالة $G \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$، تكون لأجلها:

$$g = G \qquad on\ \partial\Omega$$

ثمّ نفرض أنّ $u = U + G$، عندئذٍ تُردّ المسألة(2−56) إلى إيجاد الدّالة $U \in C_0^2(\Omega)$ والتي تحقق:

$$-\nabla.(p\nabla(U+G)) + q(U+G) = f \qquad in\ \ \Omega$$
$$U + G = g \qquad on\ \partial\Omega$$

أو بشكلٍ مكافئ:

$$-\nabla.(p\nabla U) + qU = f + \nabla.(p\nabla G) - qG \qquad in\ \ \Omega$$
$$U = 0 \qquad on\ \partial\Omega \qquad (57-2)...$$

وبشكلٍ مماثل لحالة شروط ديرخليه الحديّة نجد أنّ الشّكل الضعّيف للمسألة(2−56) يُعطى بالشّكل:

أوجد دالّة $U \in V = H_0^1(\Omega)$ بحيث يكون:

$$a(U,v) = l(v) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (58-2)...$$

حيث أنّ:

$$a(U,v) = \int_\Omega p\nabla U.\nabla v d\boldsymbol{x} + \int_\Omega qUv d\boldsymbol{x} \qquad ; v \in V$$
$$l(v) = \int_\Omega (fv - p\nabla G\nabla v - qGv)\, d\boldsymbol{x} \qquad ; v \in V$$

إنّ الشّكل الضعّيف وكما يبدو يبقى مُعرّفاً من أجل $f \in L^2(\Omega)$ ، و $G \in H^1(\Omega)$ التي يكون أثرها $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ علماً بأنّ **[10]:**

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \quad ; \quad u = U|_{\partial\Omega} \ \ , U \in H^1(\Omega)\}$$

بما أنّنا بينّا في التوطئة(2−16) أنّ $a(.,.)$ محدود وقسري، وبالتّالي فإنّه وحسب توطئة لاكس ميلغرام يُوجد حلّ وحيد للمسألة(2−57).

iii. شروط نيومان الحديّة *(Dirichlet Boundary Conditions)*:

لتكن لدينا المعادلة التّفاضليّة والتي تحقق شروط نيومان الحديّة التّالية:

$$-\nabla.(p\nabla u) + qu = f \qquad in\ \ \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \qquad on\ \partial\Omega \qquad (59-2)$$

حيث أنّ: $g \in C(\partial\Omega)$، كما نشترط أن يكون $p(x) \geq C_{min} > 0$ و $q(x) \geq \tilde{C}_{min} > 0$.

<u>الشّكل الضعّيف:</u>

يتمّ إيجاد الشّكل الضعّيف وفق الخطوات التّالية:

- بفرض $u, v \in C^\infty(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ نضرب طرفي العلاقة(2−59) بدالة الوزن v:

$$-\nabla.(p\nabla u)v + quv = fv$$

- نأخذ تكامل هذا المقدار فوق المنطقة Ω:

$$-\int_{\Omega} \nabla.(p\nabla u)v d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega} quv d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} fv\, d\boldsymbol{x}$$

- نكامل الحدّ الأول من العلاقة الأخيرة باستخدام العلاقة (2−44) وذلك بغية خفض مرتبة المشتقات الموجودة في العبارة الأخيرة.

$$\int_{\Omega}(p\nabla u.\nabla v + quv)d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} p\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} v\, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} fv\, d\boldsymbol{x} \qquad (60-2)...$$

حيث: $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \nabla u.\vec{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x})$

- وهكذا أصبح بالإمكان صياغة المسألة(2−59) بشكلها الضّعيف كما يأتي:

من أجل $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\partial\Omega)$ أوجد $u \in V = H^1(\Omega)$ والتي تحقق:

$$\int_{\Omega}(p\nabla u.\nabla v + quv)d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega} fv\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} pgv\, d\boldsymbol{S} \qquad \forall v \in V$$

أو بشكلٍ آخر:

من أجل $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\partial\Omega)$ أوجد $u \in H^1(\Omega)$ التي تحقق:

$$a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \qquad (61-2)...$$

حيث أنّ $a(u,v)$ شكل ثنائي الخطيّة متناظر مُعرّف وفق العلاقة:

$$a(u,v) = \int_{\Omega}(p\nabla u.\nabla v + quv)d\boldsymbol{x}$$

و

$$l(v) = \int_{\Omega} fv\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} pgv\, d\boldsymbol{S}$$

نلاحظ أنّ $a(.,.)$ يُعطى بنفس صيغة الشّكل ثنائي الخطيّة في حالة شروط ديرخليه الحديّة إلا أنّه يختلف عنها وذلك لأنّ الفضاء $\boldsymbol{V}$ مختلف.

<u>وحدانيّة الحلّ:</u>

توطئة (2−17) [14]:

بفرض: $p \ge C_{min} > 0$ و $q \ge \tilde{C}_{min} > 0$ تقريباً في كلّ مكان في Ω، عندئذٍ يوجد حلّ وحيد $u \in H^1(\Omega)$ للمسألة(2−59).

الإثبات:

<u>$a(.,.)$ محدود:</u>

يُبرهن بطريقة مماثلة تماماً لتلك المتّبعة في حالة شروط دير خليه الحديّة.

<u>$a(.,.)$ قسري:</u>

لا يُمكننا في هذه الحالة استخدام متراجحة بونكاري وذلك لأنّ: $v \notin H_0^1(\Omega)$ لذا نستفيد من الشروط المذكورة في التوطئة فنجد:

$$a(v,v) = \int_\Omega (p(\nabla v)^2 + qv^2)dx$$
$$a(v,v) \geq \min(C_{min}, \tilde{C}_{min})||v||^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

وهكذا نجد أنّ $a(.,.)$ قسري.

وبالتّالي وحسب توطئة لاكس ميلغرام نجد أنّه من أجل كل $f \in L^2(\Omega)$ يوجد حلٌّ وحيد $u \in H^1(\Omega)$ للمسألة(2−59).

iv. شروط نيوتن الحديّة (Newton Boundary Conditions):

تجمع شروط نيوتن الحديّة بين قيم الدّالة وقيم المشتقات النّاظميّة لها عند المحيط، مثل دراسة المعادلة التّفاضليّة التّالية مع الشروط الحديّة المرافقة لها:

$$\begin{cases} -\nabla.(p\nabla u) + qu = f & in \ \Omega \\ c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}} = g & on \ \partial\Omega \end{cases} \qquad (62-2)...$$

حيث أنّ: $f \in C(\Omega)$ و $g, c_1, c_2 \in C(\partial\Omega)$ و $\alpha \in C(\partial\Omega)$ بحيث يكون $c_1 c_2 > 0$ و $0 < \varepsilon \leq |c_2|$ على المحيط $\partial\Omega$، وكذلك $p \geq C_{min} > 0$ و $q \geq \tilde{C}_{min} > 0$.

بفرض $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ عندئذٍ يُمكن أن نستنتج مباشرة وكما في حالة شروط نيومان الحديّة أنّ الشّكل الضّعيف للمسألة يُعطى بالشّكل:

$$\int_\Omega (p\nabla u.\nabla v + quv)d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} p\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}} v\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x}$$

بالاستفادة من الشروط الحديّة نجد أنّ الضّعيف يصبح بالشّكل:

من أجل $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\partial\Omega)$ و $p, q \in L^\infty(\Omega)$، أوجد $u \in H^1(\Omega)$ التي تحقق:

$$\int_\Omega (p\nabla u.\nabla v + quv)d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{pc_1}{c_2} uv\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{pg}{c_2} v\, d\boldsymbol{S} \qquad \forall v \in V$$

أو بشكلٍ آخر:

$$a(u,v) = l(v) \qquad \forall v \in V \qquad (61-2)...$$

حيث أنّ:

$$a(u,v) = \int_\Omega (p\nabla u.\nabla v + quv)d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{pc_1}{c_2} uv\, d\boldsymbol{S} \qquad \forall u,v \in V$$
$$l(v) = \int_\Omega fv\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{pg}{c_2} v\, d\boldsymbol{S} \qquad \forall v \in V$$

ويُمكن الاثبات أنّ $a(.,.)$ المُعرّف بالعلاقة السّابقة هو شكل محدود وقسري بالشّكل التّالي:

<u>$a(.,.)$ محدود</u>:

$$|a(u,v)| \leq \int_\Omega (p|\nabla u.\nabla v| + q|uv|)d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{pc_1}{c_2} |uv|\, d\boldsymbol{S} \qquad \forall u,v \in V \qquad (62-2)...$$

يُمكن وبالاستفادة من التوطئة(2−16) إثبات أنّ:

$$\int_\Omega (p|\nabla u.\nabla v| + q|uv|)d\boldsymbol{x} \le 2C_{max}\,||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}$$

وبما أنّ $c_1c_2 > 0$ و $p \in L^\infty(\Omega)$ وحسب مبرهنة الأثر(2−12) يكون:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{pc_1}{c_2}|uv|d\boldsymbol{S} \le C_{max}\,C'\int_{\partial\Omega}|uv|d\boldsymbol{S} \le C_{max}\,C'\left(\int_{\partial\Omega} u^2 d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\partial\Omega} v^2 d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_{max}\,C'|u|_{L^2(\partial\Omega)}|v|_{L^2(\partial\Omega)} \le C_{max}\,C' C_T||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}$$

$$\le C_d||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}$$

نبدّل في العلاقة(2−62) فنجد أنّ:

$$|a(u,v)| \le 2C_{max}\,||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} + C_d||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)}$$

$$|a(u,v)| \le C||u||_{H^1(\Omega)}||v||_{H^1(\Omega)} \qquad \forall u,v \in V$$

أي أنّ $a(.,.)$ محدود.

<u>$a(.,.)$ قسري:</u>

بما أنّ $p \ge C_{min} > 0$ و $q \ge \tilde{C}_{min} > 0$ ومن الشرطين $c_1c_2 > 0$ و $0 < \varepsilon \le |c_2|$ نجد:

$$a(v,v) = \int_\Omega p(\nabla v)^2 + qv^2 d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{pc_1}{c_2}v^2 d\boldsymbol{S}$$

$$\ge min\left(C_{min}, \tilde{C}_{min}\right)||v||^2_{H^1(\Omega)} + \frac{C_{min}\,c}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} v^2 d\boldsymbol{S} \ge min\left(C_{min}, \tilde{C}_{min}\right)||v||^2_{H^1(\Omega)}$$

وهكذا نجد أنّ $a(.,.)$ قسري.

وبالتّالي فإنّه وحسب توطئة لاكس ميلغرام نجد أنّه أياً كانت $f \in L^2(\Omega)$ يوجد حلٌّ وحيد $u \in H_0^1(\Omega)$ للمسألة(2−61).

2−2−7−2. النموذج الثاني:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ منطقة ليبتشيز محيطها $\partial\Omega$ مؤلّف من مركبتين منفصلتين $\boldsymbol{\Sigma}, \Gamma$ أي:

$$\partial\Omega = \overline{\boldsymbol{\Sigma}} \cup \overline{\Gamma}$$

و

$$\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^n \overline{\Omega}_i$$

حيث أنّ: $(\Omega_i\,; i = 1,2,\dots,n)$ هي مناطق جزئية بسيطة الترابط ، مستمرة بمفهوم ليبتشيز.

ولنأخذ المعادلة التّفاضليّة الجزئيّة من المرتبة الثانية:

(63−2)... $\nabla \times (\frac{1}{\mu_r}\nabla \times \vec{E}) - k_0^2\varepsilon_r\vec{E} = \vec{F}$

شروط النقل الحدّيّة التامة: $\boldsymbol{\nu} \times \vec{E} = 0 \quad on\ \Gamma$ ...(64−2)

شروط الممانعة الحدّيّة: $\frac{1}{\mu_r}(\nabla \times \vec{E}) \times \boldsymbol{\nu} - ik_0\lambda\vec{E}_T = \vec{g} \quad on\ \Sigma$ ...(65−2)

سوف نُوجد الشّكل الضّعيف للمعادلة التّفاضليّة الجزئيّة (2−63) والمحققة للشروط الحديّة المفروضة.

حيث أنّ: $\vec{E}_T = (\boldsymbol{\nu} \times \vec{E}) \times \boldsymbol{\nu}$ و $\boldsymbol{\nu}$ شعاع واحدة النّاظم على السطح.

لكن قبل إيجاد هذا الشّكل الضّعيف نفرض بعض الشروط على المنطقة المدروسة Ω وهي:

من أجل ε_r, μ_r دوال مستمرة على كلّ منطقة جزئية Ω_i نفرض أنّ:

١. مقصور ε_r على كلّ منطقة جزئيّة Ω_i هو دالة تنتمي إلى الفضاء: $H^3(\Omega_i)$.

٢. يوجد ثابت $C_\varepsilon > 0$ بحيث أمّا $Im(\varepsilon_r) \geq C_\varepsilon$ أو: $Im(\varepsilon_r) \geq 0$.

٣. $\lambda \in L^\infty(\Sigma)$ و $\vec{F} \in (L^2(\Omega))^3, \vec{g} \in (L^2(\Sigma))^3$.

<u>الشّكل الضّعيف:</u>

نضرب المعادلة (2−63) بدالة الوزن $\vec{T}$ ونأخذ التكامل فوق المنطقة Ω:

$$\iiint_\Omega \vec{T}.\left(\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E}\right) - k_0^2 \varepsilon_r \vec{E} - \vec{F}\right) d\Omega = 0$$

بالاستفادة من مبرهنة ستوكس(2−13) والعلاقتين:

$$\nabla.(\vec{a} \times \vec{b}) = (\nabla \times \vec{a}).\vec{b} - \vec{a}.(\nabla \times \vec{b})$$
$$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}$$

نجد أنّ:

$$\iiint_\Omega [\frac{1}{\mu_r}(\nabla \times \vec{E}).(\nabla \times \vec{T}) - k_0^2 \varepsilon_r \vec{E}.\vec{T}] d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\boldsymbol{\nu} \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E}\right)].[(\boldsymbol{\nu} \times \vec{T}) \times \boldsymbol{\nu}] dS = \iiint_\Omega \vec{F}.\vec{T} d\Omega$$

ومن أجل الشرطين الحدّيين(2−64)،(2−65) يكون:

$$\iiint_\Omega [\frac{1}{\mu_r}(\nabla \times \vec{E}).(\nabla \times \vec{T}) - k_0^2 \varepsilon_r \vec{E}.\vec{T}] d\Omega - \int_\Sigma i k_0 \lambda \vec{E}_T.\vec{T} dS = \iiint_\Omega \vec{F}.\vec{T} d\Omega + \int_\Sigma \vec{g}.\vec{T} dS$$
(66−2)...

من هذه العلاقة نجد أنّه من الأنسب اختيار $\vec{E}$ من الفضاء:

(67−2)... $$V = \{\vec{E} \in H(curl, \Omega) \,;\ \ \boldsymbol{\nu} \times \vec{E} = 0 \quad on\ \Gamma\}$$

والذي هو عبارة عن فضاء هلبرت مزوّد بالنظيم:

$$(\vec{E}, \vec{T}) = \iiint_\Omega \vec{E}.\vec{T} d\Omega + \iiint_\Omega (\nabla \times \vec{E}).(\nabla \times \vec{T}) d\Omega + \int_\Sigma \vec{E}_T.\overrightarrow{T_T} dS$$

حيث أنّ:

$$H(curl, \Omega) = \{\vec{E} \in (L^2(\Omega))^3 \ \ ; \ \ \nabla \times \vec{E} \in (L^2(\Omega))^3\}$$

وبهذا يمكن التعبير عن المسألة(2−63)−(2−65) بالشكل:

أوجد $\vec{E} \in V$ والذي يحقق:

(68−2)... $$a(\vec{E}, \vec{T}) = l(\vec{T}) \qquad \forall \vec{T} \in H^1(\Omega)$$

حيث أنّ $a(.,.)$ شكل ثنائي الخطيّة معرّف بالشكل:

$$a(\vec{E},\vec{T}) = \iiint_\Omega [\frac{1}{\mu_r}(\nabla\times\vec{E}).(\nabla\times\vec{T}) - k_0^2\varepsilon_r\vec{E}.\vec{T}]d\Omega - \int_\Sigma ik_0\lambda\vec{E}_T.\vec{T}dS$$

و $l(.)$ شكل خطي يُعطى بالعلاقة:

$$l(\vec{T}) = \iiint_\Omega \vec{F}.\vec{T}d\Omega + \int_\Sigma \vec{g}.\vec{T}dS$$

<u>وحدانيّة الحلّ:</u>

مبرهنة(2−18) [10,14]:

لتكن Ω منطقة محققة للشروط الحديّة المفروضة على المحيط Σ و Γ وعلى الدوال $\varepsilon_r,\mu_r,\vec{F},\vec{g},\lambda$ الواردة في مستهل هذه الفقرة، ولنفرض تحقق أحد الشرطين:

١. $\Sigma \neq \emptyset$.

٢. $Im(\varepsilon_r) > 0$ في منطقة جزئية من Ω تحوي كرة نصف قطرها موجب تماماً.

عندئذٍ يوجد من أجل أي $k > 0$ حل وحيد $\vec{E}\in V$ للمسألة(2−63)، كما يوجد ثابت C_k مستقل عن $\vec{E},\vec{F},\vec{g}$ ومتعلق بالعدد k يحقق: $\|\vec{E}\|_V \leq C_k(\|\vec{F}\|_{\left(L^2(\Omega)\right)^3} + \|\vec{g}\|_{(L^2(\Sigma))^3})$

الفصـل الثـالـث

مبادئ أساسيّة في تجزئة المنطقة

إلى عناصر منتهية

نُخصّص هذا الفصل للحديث عن أنواع مختلفة من الجمل الإحداثية (جمل الإحداثيات المعمّمة، جمل الإحداثيات الموضعيّة، جمل الإحداثيات الطبيعية) حيث نوضّح العلاقة فيما بينها، كما نعرض أشكالاً مختلفةً للعناصر التي يُمكن استخدامها في تجزئة المنطقة المدروسة، إضافة إلى دوال الشّكل المرتبطة بكل عنصر، ونميّز هنا بين نوعين من دوال الشّكل وهما: دوال قاعدة العقد ودوال قاعدة الأضلاع، كما نوضّح مفهوم العنصر المرجعي وعلاقات التحويل التي تربط بينه وبين العناصر المعمّمة، مستهلّين ذلك كلّه بتوضيح لمفهوم العنصر المنتهي.

3-1. ماذا نعني بالعنصر المنتهي؟ [10]

العنصر المنتهي هو عبارة عن ثلاثية $(K, P_k, \sum_k)$ حيث أن:

K: المنطقة الهندسية المدروسة (رباعي وجوه، هرم، موشور، ....).

P_k: فضاء حدوديّات معرّفة على $\boldsymbol{K}$.

$\sum_k$: مجموعة من الدّاليّات الخطيّة المعرفة على $\boldsymbol{P_k}$، وتُدعى هذه الداليات الخطيّة بدرجات حريّة العنصر المنتهي.

مثال(3-1):

يُمكن تعريف العناصر المنتهية التربيعية في **(1- D)** بالشّكل:

K : المجال (a,b).

P_k: فضاء الحدوديّات بمتغيّر واحد ومن الدرجة الثانية على الأكثر ، أي فضاء الحدوديّات من الشّكل:

$$u(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \;\; ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$\sum_k$: يُعرّف بالشّكل:

$$\Sigma_k = \{l_i \,; 1 \le i \le 3 \;\; l_1\,(u) = u(a), l_2\,(u) = u\left(\frac{a+b}{2}\right), l_3\,(u) = u(b)\}$$

تعريف(3-1) [10,14]:

يُقال عن العنصر المنتهي$(K, P_k, \sum_k)$ إنه ذو حل وحيد(***unisolved***) إذا حددت درجات الحريّة في $\sum_k$ دالة وحيدة من P_k.

ملاحظة(3-1):

نلاحظ أنّ$(K, P_k, \sum_k)$ في المثال(3−1) ذو حل وحيد، لأنّه وكما نعلم يكفي كي تتحدد الحدوديّة التربيعية بشكل وحيد أن نعرف قيمتها عند ثلاث نقاط مختلفة.

تُستخدم درجات الحريّة هذه عادةً لإيجاد قاعدة للفضاء P_k، وتدعى دوال القاعدة الناتجة في المراجع الهندسية بدوال الشّكل (***Shape functions***) وسنأتي إلى تفصيلها لاحقاً.

3-2. مبادئ أساسيّة في التجزئة:

تعتبر عمليّة التجزئة هي الخطوة الأولى في طريقة العناصر المنتهية، وترتكز هذه الخطوة بدورها على أمور أساسيّة ألا وهي:

3−2−1. التّرقيم الموضعي والترقيم المعمم (*local and global numbering*):

نقوم عند دراسة المسائل الهندسية بطريقة العناصر المنتهية بعمليّة تجزئة المنطقة المدروسة إلى مجموعة من العناصر يتحدد شكلها وفقاً للمنطقة المدروسة، هذا و إن أكثر العناصر شيوعاً واستخداماً في طريقة العناصر المنتهية هي العناصر الموضحة في الشّكل(3−1).

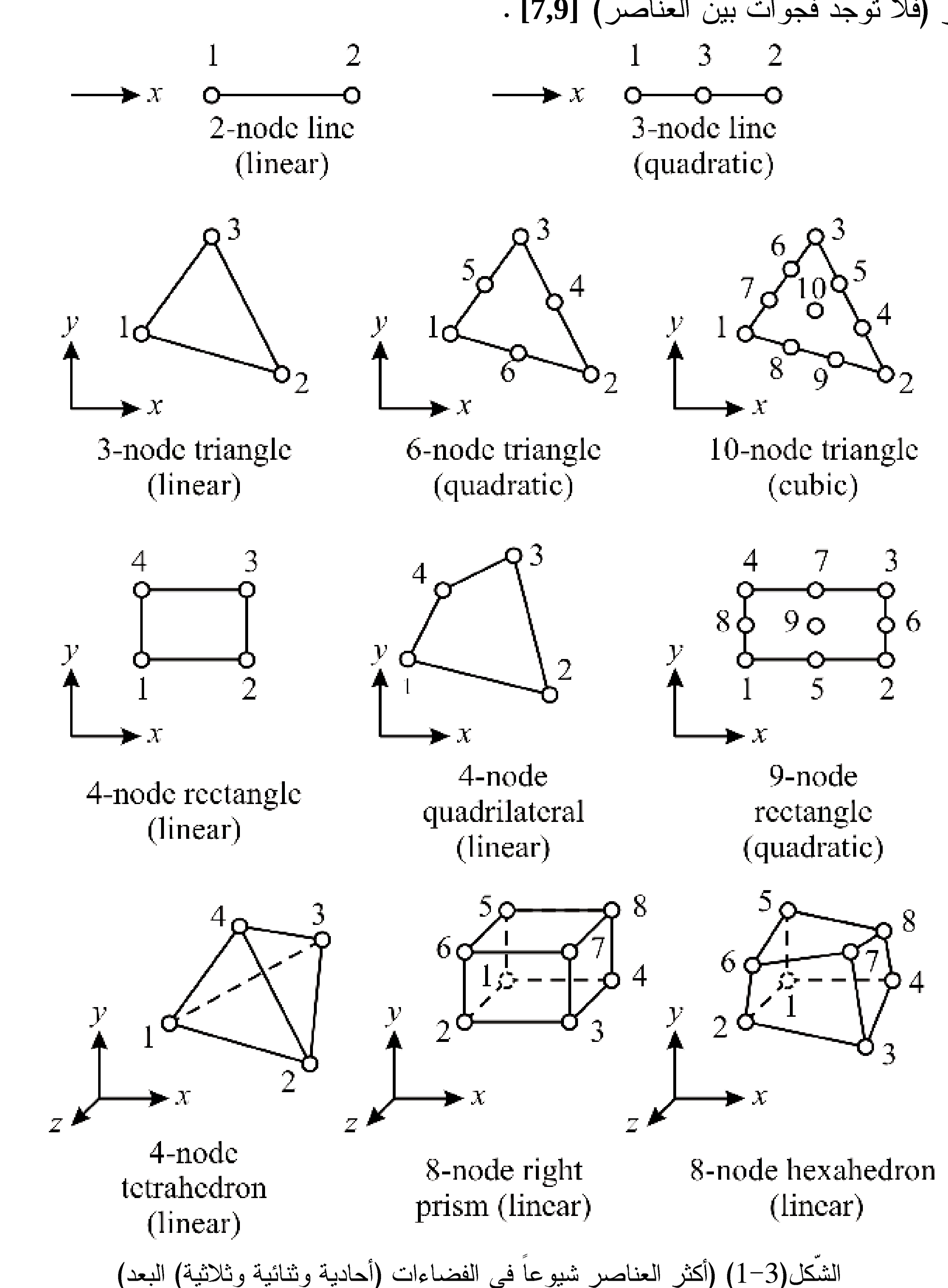
ثمّ يُرفق كل عنصر(وكل عقدة) بعد تجزئة المنطقة برقم وحيد ضمن المنطقة المدروسة يُدعى بالرقم المعمم للعنصر، كما وتأخذ العقد أرقاًمّا أخرى تختلف ضمن العنصر الواحد تدعى بالأرقام الموضعيّة للعقد.

3−2−2. دوال التّقريب (*approximation functions*):

يتمّ تقريب متغير الحقل باستخدام دوال تقريب ملائمة، ويُعتبر اختيار دوال التقريب أمراً أساسياً في طريقة العناصر المنتهية، إذ ينبغي لدوال التقريب أن تضمن لنا التقارب من الحل الفعلي عند اعتماد تمثيل شبكي جيد للمنطقة المدروسة، وقد تم اختيار الحدوديّات لتكون دوال التقريب المطلوبة نظراً لسهولة اشتقاقها ومكاملتها، أمّا لاستقرار الحل فقد اشترط على دوال تقريب أن تحقق ما يلي:

أولاً: التوافق (***compatibility***):

ونعني بذلك أنه يجب على دوال التقريب ومشتقاتها الجزئية حتى المرتبة **(*m*-1)** (حيث ***m*** هي أعلى مرتبة اشتقاق تظهر في العبارة التكاملية لمعادلة العنصر) أن تكون مستمرة على محيط العنصر (فلا توجد فجوات بين العناصر) **[7,9]** .



الشكل(3-1) (أكثر العناصر شيوعاً في الفضاءات (أحادية وثنائية وثلاثية) البعد)

ثانياً: التمامية (*completeness*):

ونقصد بها أنّه يجب على متغير الحقل ومشتقاته الجزئية "حتى أعلى مرتبة اشتقاق تظهر في العبارة التكاملية" أن تقبل قيمة ثابتة عندما يسعى حجم العنصر إلى الصفر وعند اعتماد تمثيل شبكي جيد للمنطقة.

ونظراً لأنّ الحدوديّات التّامة تحقق هذه الخواص فقد تمّ الاستعانة بها لاستنتاج دوال الشّكل، ويُعطى الشّكل العام للحدوديّات التامة من الدّرجة ***n*** في الفضاء أحادي البعد (بمتغيّر وحيد) بالشّكل:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k x^{k-1} \qquad \text{(1-3)...}$$

وبالتّالي فإنّ الحدوديّات الثلاث الأولى في الفضاء أحادي البعد هي:

- الحدوديّة الثابتة: $P_0(x) = a_1$
- الحدوديّة من الدّرجة الأولى: $P_1(x) = a_1 + a_2 x$
- الحدوديّة من الدّرجة الثانية: $P_2(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$

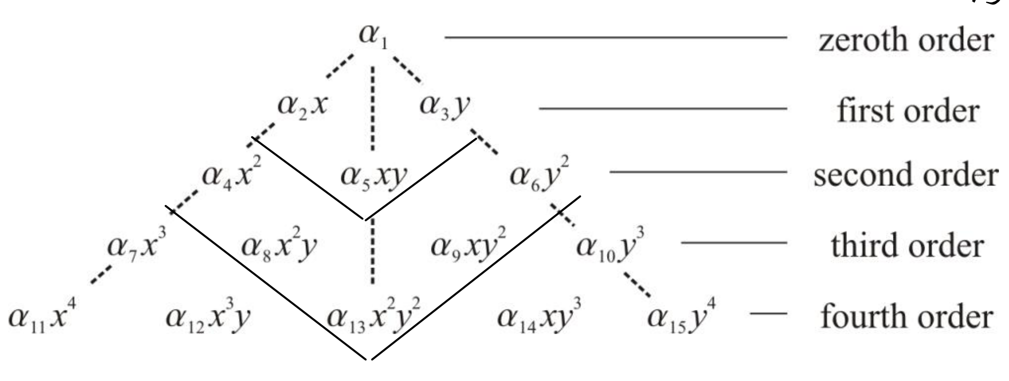
أمّا الشّكل العام للحدوديّات التامة من المرتبة ***n*** في الفضاء ثنائي البعد(بمتغيرين) فهو :

$$P_n(x,y) = \sum_{k=1}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} a_k x^i y^j \qquad i+j \le n \qquad \text{(2-3)...}$$

وهكذا تكون الحدوديّات التّامة الثلاث الأولى في الفضاء ثنائي البعد هي :

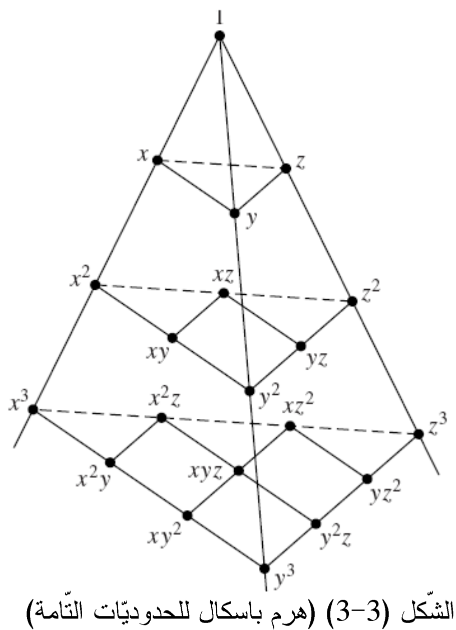
- الحدوديّة الثابتة: $P_0(x,y) = a_1$
- الحدوديّة من الدّرجة الأولى: $P_1(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$
- الحدوديّة من الدّرجة الثانية: $P_2(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2$

ويُمكن بالاستعانة بمثلث باسكال(الشّكل(3−2)) الحصول على الحدوديّات التامة في **(2-D)** من أي درجة كانت.



الشّكل (3−2) (مثلّث باسكال للحدوديّات التّامة)

أمّا الحدوديّات التّامّة في **(3-D)** فيُمكن الحصول عليها مباشرة من خلال الاستعانة بهرم باسكال الموضّح بالشّكل (3−3).



الشّكل (3−3) (هرم باسكال للحدوديّات التّامة)

<u>ثالثاً:</u> التجانس(التناحي) الهندسي ***(geometric isotropy)*:**

تُوصف الدوال الرياضية بأنها تحقق خاصة التجانس الهندسي إذا كان لها السلوك نفسه في كل اتجاه، ولقد لُوحظ أنّ الحدوديّات التّامة تحقق هذه الخاصّة، لكن إن لم توجد حدوديّة تامة عدد حدودها مساوٍ لعدد عقد العنصر المنتهي فإنّنا نأخذ الحدوديّة التامة التي يكون عدد حدودها أكبر من عدد العقد ثم نهمل الحدود غير المتناظرة من الحدوديّة التامة فنحصل بذلك على حدوديّة متجانسة هندسياً عدد حدودها مساوٍ لعدد العقد.

فمن أجل العنصر المستطيل الذي يملك أربع عقد، نأخذ الحدوديّة التامّة $P_2(x,y)$ التي تحوي ستة حدود، ونظراً لأننا بحاجة إلى أربعة حدود فقط فإننا نحذف الحدين: a_4x^2 و a_6y^2 لنحصل على الحدوديّة المتجانسة هندسياً:

$$P_2(x,y) = a_1 + a_2\,\underbrace{x + a_3 y} + a_5\,\underbrace{xy}$$

إنّ الحدوديّة الأخيرة متجانسة هندسياً لأنَّ ***x, y*** تظهران فيها بنفس القوى.

3-2-3. الجمل الإحداثية (Coordinate systems):

سنعتمد في دراستنا للعناصر المنتهية على ثلاثة أنواع من الجمل الإحداثية وهي:

3-2-3-1. الإحداثيات المعمّمة (Global Coordinates):

ونقصد بها جملة الإحداثيات التي تُنسب إليها الجملة المدروسة، وتُستخدم في:

- تحديد موضع كل نقطة.
- تحديد جهة كل عنصر.
- تحديد الشروط الحديّة والقوى المطبقة على المنطقة المدروسة.
- تمثيل الحل التقريبي لمتغير الحقل.

إلا أنّ هذه الجملة غير ملائمة لحساب التكاملات الضرورية في بناء مصفوفة العنصر إذ أنّها تؤدي غالباً إلى تكاملات صعبة.

3-2-3-2. الإحداثيات الموضعيّة (Local Coordinates):

جملة إحداثية مبدؤها نقطة من العنصر ولكل عنصر جملة إحداثيات موضعيّة خاصة به، أمّا أهميتها فتكمن في:

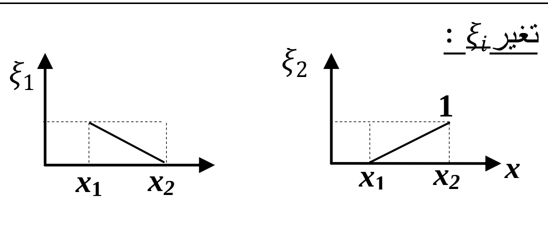
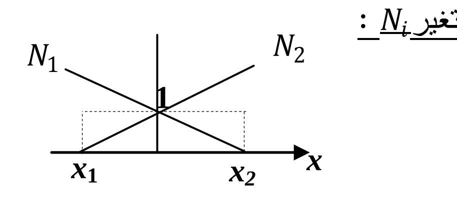
- تبسيط العمليات الجبرية اللازمة لإيجاد مصفوفة العنصر.
- تبسيط التكاملات من خلال استخدامها في التعبير عن دوال التقريب.
- تلعب دوراً هامّاً في دراسة العناصر ذات المحيط المنحني.

3-2-3-3. الإحداثيات الطبيعية (Natural Coordinates):

تسمح هذه الجملة الإحداثية بتحديد موضع نقطة داخل العنصر باستخدام معاملات لابعدية (***Dimensionless parameters***) قيمتها المطلقة لا تتجاوز الواحد.

وتُستخدم بشكل أساسي لتحديد موضع نقطة داخل العنصر بدلالة إحداثيات عقد هذا العنصر، وفيما يلي نعرض بعض الإحداثيات الطبيعية في فضاءات مختلفة.

i. الإحداثيات الطبيعية في (1-D):

(a إحداثيات الطول:	(b الإحداثيات المركزية:
<u>إحداثيات الطول:</u> $\xi_1 = {L_1}/{L}\ ,\xi_2 = {L_2}/{L}$ حيث: $L_1 + L_2 = L$ وبالتّالي: $\xi_1 + \xi_2 = 1$ ...(3−3) الشّكل(3−4)	<u>الإحداثيات المركزية:</u> $N_1 = \frac{(1-\xi)}{2}, N_2 = \frac{(1+\xi)}{2}$ حيث أن: $\xi = r/(\frac{L}{2})$ و r هو فاصلة النقطة بالنسبة للإحداثيات المركزية. الشّكل(3−5)
<u>العلاقة بين إحداثيات الطول و الإحداثيات المعمّمة:</u> يُمكن التعبير عن موضع نقطة **P** فاصلتها **x** بالعلاقة: $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$ ...(3−4) من (3−3) و(3−4) نجد أن: $\xi_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ $\xi_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	<u>العلاقة بين الإحداثيات المركزية و الإحداثيات المعمّمة:</u> يُمكن التعبير عن موضع نقطة **P** فاصلتها **x** بالعلاقة: $x = r + x_1 + \frac{L}{2} = \frac{L}{2}\xi + x_1 + \frac{L}{2}$ نبدل **L** بقيمتها ونجمّع العناصر بالنسبة لقيمتين x_1, x_2 فنجد أنّ: $x = \frac{1}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2$ $x = N_1 x_1 + N_2 x_2$
<u>خواص ξ_i:</u> $\xi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ;i = j \\ 0 & ;i \neq j \end{cases} \quad i,j = 1,2$ $\xi_1 + \xi_2 = 1$	<u>خواص N_i:</u> $N_1(-1) = 1\, , N_1(1) = 0$ $N_2(-1) = 0\, , N_2(1) = 1$ $N_1 + N_2 = 1$
x · L₂ · L₁ · L · 1 x_1 · p x · 2 x_2 الشّكل(3−4)	$\xi = -1$, $r = -L/2$ · r · ξ · $\xi = 1$, $r = L/2$ · L/2 · L · L/2 الشّكل(3−5)
<u>تغير ξ_i :</u> 	<u>تغير N_i :</u> 

ii. الإحداثيات الطبيعية في (2-D):

a) إحداثيات المساحة:

إحداثيات المساحة:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A},\ \xi_2 = \frac{A_2}{A},\ \xi_3 = \frac{A_3}{A}$$

حيث أنّ A_3, A_2, A_1, A هي مساحات المثلثات **(123)**، **(23P)**، **(13P)**، **(12P)** على الترتيب الشّكل(3–6).

العلاقة بين الإحداثيات المعمّمة و إحداثيات المساحة:

يتحدد موضع نقطة ***P(x,y)*** بشكل تركيب خطي لإحداثيات المساحة بالإحداثيات المعمّمة للعقد:

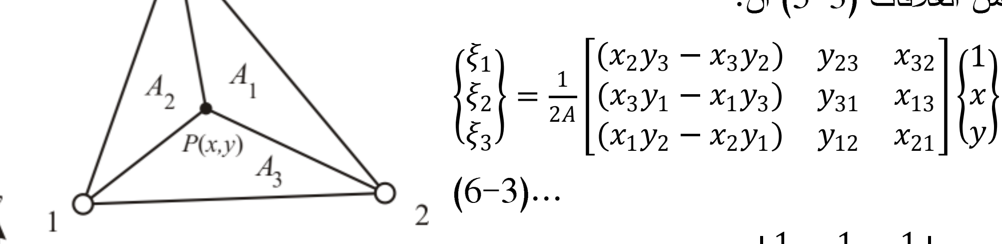
$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$$

$$y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \qquad (3\text{–}5)\ldots$$

خواص ξ_i: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$

$\xi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$ ***i, j*** **=1,2,3**

ونجد من العلاقات (3–5) أنّ:



$$\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix}(x_2y_3 - x_3y_2) & y_{23} & x_{32}\\ (x_3y_1 - x_1y_3) & y_{31} & x_{13}\\ (x_1y_2 - x_2y_1) & y_{12} & x_{21}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ x\\ y\end{Bmatrix} \qquad (3\text{–}6)\ldots$$

حيث أنّ:
$$2A = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}$$

$$x_{nm} = x_n - x_m$$

$$y_{nm} = y_n - y_m$$

الشّكل(3–6)

(إحداثيات المساحة في العنصر المثلث)

التكاملات المرتبطة بالمساحة **[9]**:

$$I = \int_A \xi_1^m \xi_2^n \xi_3^l dA = \frac{m!\,n!\,l!}{(m+n+l+2)!}2A$$
m ,n ,l أعداد صحيحة

b) الإحداثيات المركزية في (2-D):

يتعيّن العنصر رباعي الأضلاع في المستوي بأربعة عقد، حيث تتوضع عقدة عند كل زاوية من زواياه، ويتحدد موضع النقطة ***P(x, y)*** (بالإحداثيات المعمّمة) من العنصر بدلالة جملة الإحداثيات المركزية (ξ, η) التي ينطبق مبدؤها على مركز الشّكل الرباعي(الشّكل(3–7))، إذ ترتبط الإحداثيات المعمّمة ***(x, y)*** بالإحداثيات المركزية (ξ, η) بالعلاقة:

$$x = a_x + b_x\xi + c_x\eta + d_x\xi\eta$$

$$y = a_y + b_y\xi + c_y\eta + d_y\xi\eta \qquad (3\text{–}7)\ldots$$

تُمثّل هذه العلاقات تطبيقاً يسمح بالانتقال من الشّكل الرباعي المنسوب إلى جملة الإحداثيات المعمّمة إلى مربع الواحدة في جملة الإحداثيات المركزية.

فمن أجل المستقيم $\eta = -1$ نبدل في العلاقات $(7-3)$ فنجد أنّ:

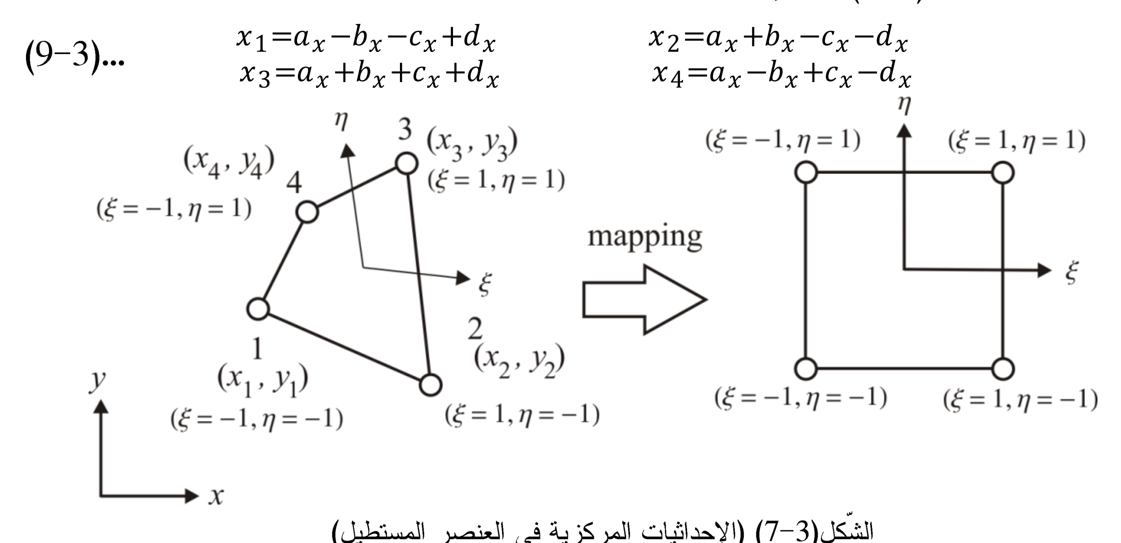
$$x=a_x+b_x\xi-c_x-d_x\xi$$
$$y=a_y+b_y\xi-c_y-d_y\xi \qquad \textbf{(8-3)...}$$

نحذف ξ من المعادلتين $(8-3)$ فنجد أن $\boldsymbol{x, y}$ مرتبطتان خطياً فيما بينهما بالعلاقة: $y = A + Bx$

أي أن صورة المستقيم $\eta = -1$ في جملة الإحداثيات المركزية هو مستقيم في جملة الإحداثيات المعمّمة، وكذلك الحال من أجل $\xi = -1, \xi = 1, \eta = 1$.

لتعيين ثوابت العلاقة $(8-3)$ نبدّل إحداثيات العقد فيها فنجد أنّ:

$$x_1=a_x-b_x-c_x+d_x \qquad x_2=a_x+b_x-c_x-d_x$$
$$x_3=a_x+b_x+c_x+d_x \qquad x_4=a_x-b_x+c_x-d_x \qquad \textbf{(9-3)...}$$



الشّكل(3-7) (الإحداثيات المركزية في العنصر المستطيل)

نُوجد حلّ جملة المعادلات (3-9) بالنسبة للثوابت a_x, b_x, c_x, d_x ثمّ نُجمّع الحدود بالنسبة إلى x_i بعد التبديل في(3-8) فنجد أن:

$$x = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_3 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_4$$

ونكتب:

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)x_i \qquad (10-3)...$$

حيث أنّ:

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\,\xi_i)(1+\eta\,\eta_i) \qquad (11-3)...$$

وتشير $\eta_i\,,\xi_i$ إلى إحداثيات العقد بالنسبة لجملة الإحداثيات المركزية.

وبطريقة مماثلة نجد أنّ:

$$y = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)y_i$$

وكما نلاحظ إنّ N_i تحقق الخاصتين التّاليتين:

$$\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) = 1 \qquad N_i\,(\eta_j\,,\xi_j) = \delta_{ij} \quad i,j = 1,2,3,4$$

iii. الإحداثيات الطبيعية في (3-D):

a) إحداثيات الحجم:

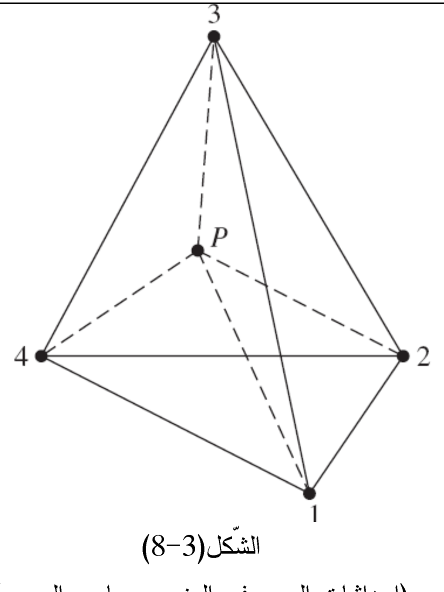
$$\xi_1=\frac{V_1}{V},\ \xi_2=\frac{V_2}{V},\ \xi_3=\frac{V_3}{V},\ \xi_4=\frac{V_4}{V}$$

حيث V_4, V_3, V_2, V_1, V هي حجوم رباعيات الوجوه **(1234)**، **(234P)**، **(134P)**، **(124P)**، **(123P)** على الترتيب (الشّكل(3-8)).

العلاقة بين الإحداثيات المعمّمة وإحداثيات الحجم:

يتحدد موضع نقطة منسوبة لجملة الإحداثيات المعمّمة بشكل تركيب خطي لإحداثيات المساحة بالإحداثيات المعمّمة للعقد:

$$\begin{aligned} x&=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3+\xi_4x_4\\ y&=\xi_1y_1+\xi_2y_2+\xi_3y_3+\xi_4y_4\\ z&=\xi_1z_1+\xi_2z_2+\xi_3z_3+\xi_4z_4\end{aligned}\quad\ldots(12-3)$$



الشّكل(3-8)

(إحداثيات الحجم في العنصر رباعي الوجوه)

خواص ξ_i:

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=1\quad\ldots(13-3)$$

$$\xi_i=\frac{1}{3V}(a_i+b_ix+c_iy+d_iz)\quad \text{و}\quad \xi_i(x_j,y_j,z_j)=\delta_{ij}\quad i,j=1,2,3,4$$

حيث أنّ:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\y_1&y_2&y_3&y_4\\z_1&z_2&z_3&z_4\end{vmatrix}$$

و

$$a_i=x_j(y_kz_l-y_lz_k)+y_j(x_lz_k-x_kz_l)+z_j(x_ky_l-x_ly_k)$$

$$b_i=(y_lz_k-y_kz_l)+(y_jz_l-y_lz_j)+(y_kz_j-y_jz_k)$$

$$c_i=(x_kz_l-x_lz_k)+(x_lz_j-x_jz_l)+(x_jz_k-x_kz_j)$$

$$d_i=(x_ly_k-x_ky_l)+(x_jy_l-x_ly_j)+(x_ky_j-x_jy_k)$$

حيث تتبدّل الأدلة **(i, j, k ,l)** وفق قاعدة دورية.

التكاملات المرتبطة بالحجم **[9]**:

$$I=\int_V \xi_1^a\xi_2^b\xi_3^c\xi_4^d\,dV=\frac{a!\,b!\,c!\,d!}{(a+b+c+d+3)!}6V$$

حيث **a, b, c ,d** أعداد صحيحة

b) الإحداثيات المركزية في (3-D):

يتعين العنصر سداسي الوجوه في الفراغ بثماني عقد، بحيث تتوضّع عقدة في كل زاوية، ويُمكن تحديد موضع النقطة ***P(x,y,z)*** (بالإحداثيات المعممّة) من العنصر بدلالة جملة الإحداثيات المركزية (ξ,η,ζ) التي ينطبق مبدؤها على مركز سداسي الوجوه (الشّكل(3−9))، إذ ترتبط الإحداثيات المعممّة ***(x, y,z)*** بدلالة الإحداثيات المركزية (ξ,η,ζ) وفق العلاقات:

$$\begin{aligned} x&=a_x+b_x\xi+c_x\eta+d_x\zeta+e_x\xi\eta+f_x\eta\zeta+g_x\xi\zeta+j_x\xi\eta\zeta \\ y&=a_y+b_y\xi+c_y\eta+d_y\zeta+e_y\xi\eta+f_y\eta\zeta+g_y\xi\zeta+j_y\xi\eta\zeta \\ z&=a_z+b_z\xi+c_z\eta+d_z\zeta+e_z\xi\eta+f_z\eta\zeta+g_z\xi\zeta+j_z\xi\eta\zeta \end{aligned} \qquad (14-3)\ldots$$

تفيد العلاقات الأخيرة وكما في حالة **(2-D)** في الانتقال من الشّكل سداسي الوجوه المنسوب إلى جملة الإحداثيات المعممّة إلى مكعب الواحدة في جملة الإحداثيات المركزية ، كذلك فإنّه يُمكن وبطريقة مماثلة تماماً إثبات أنه يُمكن التعبير عن الإحداثيات المعممّة بدلالة الإحداثيات المركزية وإحداثيات العقد الثمان كما يلي:

$$\begin{aligned} x &= \textstyle\sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)x_i \\ y &= \textstyle\sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)y_i \\ z &= \textstyle\sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)z_i \end{aligned} \qquad (15-3)\ldots$$

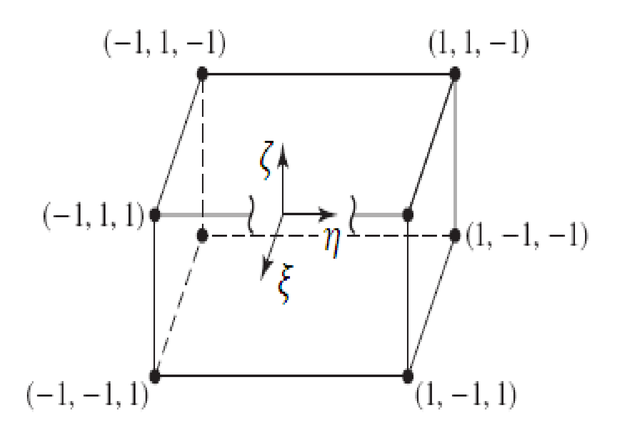
حيث أن:

$$N_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\xi\,\xi_i)(1+\eta\,\eta_i)(1+\zeta\,\zeta_i) \qquad (16-3)\ldots$$

كما تشير $\eta_i\,,\xi_i\,,\zeta_i$ إلى إحداثيات العقد بالنسبة لجملة الإحداثيات المركزية، ونلاحظ أن N_i تحقق:

$$N_i\,(\eta_i\,,\xi_i,\zeta_i) = \delta_{ij} \quad i,j = 1,\ldots,8$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{8} N_i = 1$$



الشّكل(3−9) (الإحداثيات المركزية في العنصر متوازي المستطيلات)

3-2-4. دوال الشّكل (*Shape functions*):

نستخدم طريقة العناصر المنتهية عادةً لتمثيل عدد كبير من المسائل المعقدة، وذلك من خلال تجزئة المنطقة المدروسة إلى عدد كبير من العناصر ذات الأشكال البسيطة، ثم نستعين بدوال استيفاء مناسبة لتقريب الدوال المجهولة على هذه العناصر (تُعرف بدوال القاعدة أو دوال الشّكل)، وحالما يتمّ تعيين دوال القاعدة يصبح من الممكن استخدام برامج مناسبة لحل المسائل المعقدة.

نعرض فيما يلي دوال الشّكل المستخدمة في تحليل العناصر المنتهية في الفضاءات (أحادية وثنائية وثلاثية) البعد ولكننا سنميز أيضاً بين نوعين منها:

- النوع الأول: عناصر قاعدة العقد (***Node based element***) ويُستخدم هذا النوع على نحو واسع في الهندسة الميكانيكية والمدنية، إضافة إلى العديد من المسائل العددية في الحقل الكهربائي السلّمي.
- النوع الثاني: عناصر قاعدة الأضلاع (***Edge based element***) ولهذه الدوال استخدام واسع في مسائل الكهرطيسية في **(3-D)** وتتميز مجاهيل هذه الدوال بأنها ترتبط بأضلاع العناصر لا بعقدها.

3-2-4-1. عناصر قاعدة العقد (*Node- Based Elements*):

يتحكم في شكل الدّالة التي نبحث عنها في حالة قاعدة عقد العناصر المنتهية قيمتها عند العقد، وبالتّالي يُمكن التّعبير عن دالة التقريب كتركيب خطي لدوال القاعدة موزونة بمعاملات العقد (قيمة الدّالة عند العقد)، وهكذا فإنه من أجل أي عنصر **e** في **(2-D)** يملك ***p*** عقدة تأخذ دالة التقريب الشّكل التّالي:

$$\phi^e(x,y) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i^e \, N_i^e(x,y) \qquad (17-3)...$$

بما أن العبارة (3-17) يجب أن تتحقق من أجل قيم المتغير ϕ^e عند عقد العنصر **e** أي: ($\phi^e(x_i,y_i) = \phi_i^e$) فإن دوال القاعدة N_i^e يجب أن تأخذ قيمة تساوي الواحد عند العقدة رقم ***i*** وتنعدم عند العقد الأخرى، وهكذا يُمكن استنتاج دوال قاعدة العقد اعتماداً على حدوديّات استيفاء لاغرانج المألوفة، ونعرض فيما يلي أشكال هذه الحدوديّات من أجل العناصر في الفضاءات ذات الأبعاد المختلفة.

أولاً: عناصر قاعدة العقد في (1-D):

وندرس في هذا الجزء العنصر المستقيم الخطّي والتّربيعي.

i. العنصر المستقيم الخطي بعقدتين:

ونميّز هنا مجموعة من الجمل الإحداثية:

١. جملة الإحداثيات المعمّمة:

ليكن e عنصراً مستقيماً محدداً بعقدتين، عندئذٍ يُمكن أن نقرب متغير الحقل ϕ^e بدالة خطيّة في الإحداثيات المعمّمة الشّكل(3−10)) أي:

$$\phi^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \qquad (18-3)...$$

فإذا كانت ϕ_1, ϕ_2 قيمتي متغير الحقل عند العقدتين اللتين فاصلتاهما x_1, x_2 على الترتيب، فإنّنا نجد بالتبديل في العلاقة(3−18) أنّ:

$$\begin{aligned} \phi_2^e &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \\ \phi_1^e &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \end{aligned} \qquad (19-3)...$$

نحل جملة المعادلتين (3−19) بالنسبة إلى α_1, α_2 ونبدّل في (3−18) فنجد أنّ:

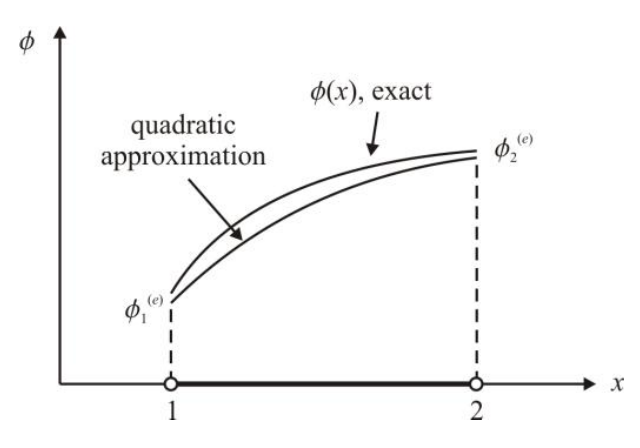
$$\phi^e(x) = N_1^e(x)\phi_1^e + N_2^e(x)\phi_2^e \qquad (20-3)...$$

حيث أن:

$$\begin{aligned} N_1^e(x) &= \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} \\ N_2^e(x) &= \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} \end{aligned} \qquad (25-3)...$$

ندعو هذه الدوال بدوال الشّكل أو دوال الاستيفاء وتتميز هاتان الدّالتان بكونهما خطيتين في x، وأنّهما تحققان:

$$N_i^e(x_j) = \delta_{ij} \qquad \& \qquad \sum_{i=1}^{2} N_i(x) = 1$$



الشّكل(3−10) (تقريب متغير الحقل بعنصر مستقيم خطي)

٢. جملة الإحداثيات المركزية:

يُمكن وبطريقة مشابهة تماماً استيفاء متغير الحقل بدالة خطيّة في الإحداثيات المركزية كما يلي:

$$\phi^e(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi \qquad (26\text{–}3)\ldots$$

فإذا كانت ϕ_1, ϕ_2 قيمتي متغير الحقل عند العقدتين اللتين فاصلتاهما $\xi_1 = -1, \xi_2 = 1$ على الترتيب، نبدّل في العلاقة(3–26) فنجد أن:

$$\begin{aligned} \phi_2^e &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ \phi_2^e &= \alpha_1 - \alpha_2 \end{aligned} \qquad (27\text{–}3)\ldots$$

نحلُّ جملة المعادلتين (3–27) بالنسبة إلى α_1, α_2 ونبدّل في العلاقة (3–26) لنجد أنّ:

$$\phi^e(\xi) = N_1^e(\xi)\phi_1^e + N_2^e(\xi)\phi_2^e \qquad (28\text{–}3)\ldots$$

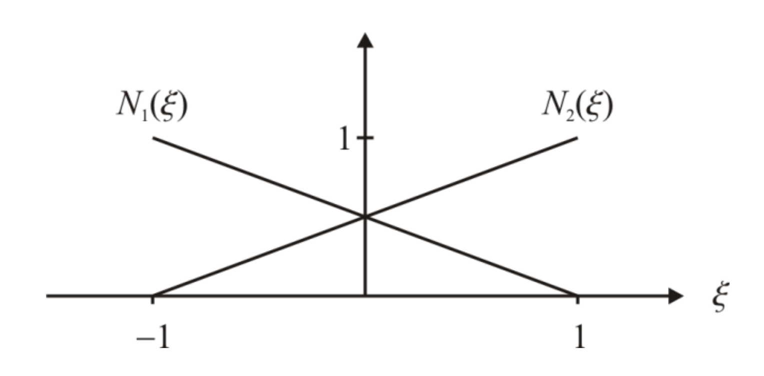
حيث أنّ:

$$\begin{aligned} N_1^e(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} \\ N_2^e(\xi) &= \frac{1+\xi}{2} \end{aligned} \qquad (29\text{–}3)\ldots$$

ويُمكن أن نكتب باختصار: $N_i^e(\xi) = \frac{1+\xi\ \xi_i}{2}$ حيث ξ_i فاصلة العقدة $\boldsymbol{i}$ بدلالة الإحداثيّات المعمّمة.

كذلك نلاحظ أن $N_1^e(\xi), N_2^e(\xi)$ تتميزان بكونهما:

- دالتين خطيتين في ξ .
- $\sum_{i=1}^{2} N_i(\xi) = 1$.
- $N_i^e(\xi_j) = \delta_{ij}\ ; i,j = 1,2$ (الشّكل(3–11)).



الشّكل(3–11) (تغير دالة شكل العنصر الخطي في **(1-D)**)

ii. **العنصر المستقيم التربيعي بثلاث عقد:**

ليكن ***e*** عنصراً مستقيماً محدداً بثلاث عقد، عندئذٍ يُمكن أن نقرّب متغير الحقل ϕ^e بدالة تربيعية في الإحداثيات المعمّمة أوالمركزية كما في حالة العناصر المستقيمة الخطيّة، وحيث أنّنا تحدّثنا عن العلاقات التي تربط بين هاتين الجملتين الإحداثيتين فإننا سنستعرض هنا العناصر بدلالة جملة الإحداثيات المركزية فقط (الشّكل(3−12))، حيث يُمكن التعبير عن متغيّر الحقل بالعلاقة:

$$\phi^e(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\xi^2 \qquad \text{(30−3)...}$$

فإذا كانت ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 قيم متغير الحقل عند العقد التي فواصلها على الترتيب:

$$\xi_1 = -1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 0$$

نبدّل في العلاقة(3−30) فنجد أنّ:

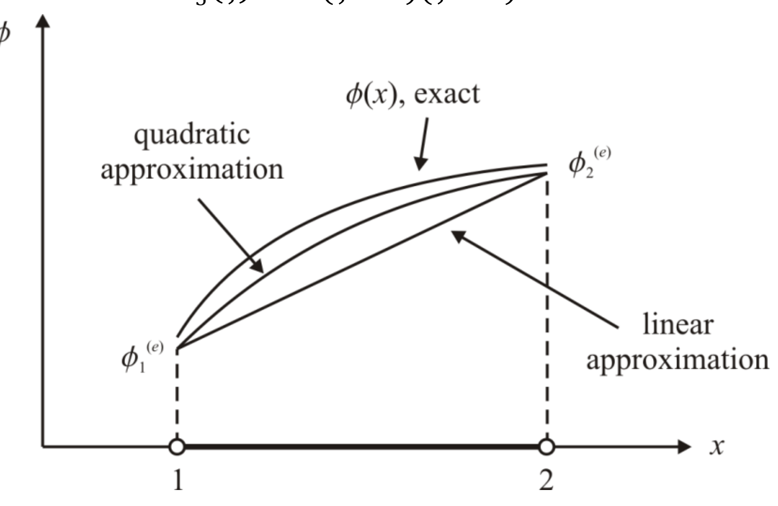
$$\begin{aligned} \phi_1^e &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ \phi_2^e &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \phi_3^e &= \alpha_1 \end{aligned} \qquad \text{(31−3)...}$$

نُوجد حلّ جملة المعادلات (3−31) بالنسبة إلى $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ونبدّل في (3−30) لنجد أنّ:

$$\phi^e(\xi) = N_1^e(\xi)\phi_1^e + N_2^e(\xi)\phi_2^e + N_3^e(\xi)\phi_3^e \qquad \text{(32−3)...}$$

حيث:

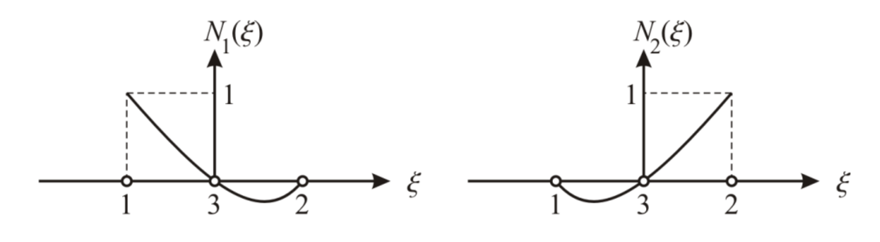
$$\begin{aligned} N_1^e(\xi) &= \frac{\xi(\xi-1)}{2} \\ N_2^e(\xi) &= \frac{\xi(\xi+1)}{2} \\ N_3^e(\xi) &= -(\xi+1)(\xi-1) \end{aligned} \qquad \text{(33−3)...}$$

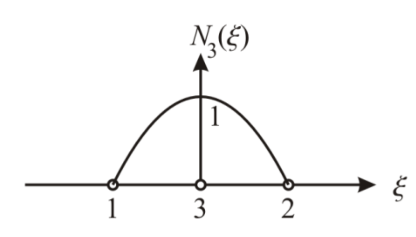


الشّكل(3−12) (تقريب متغير الحقل بعنصر مستقيم خطي وتربيعي)

كذلك تتميّز هذه الدوال بأنّها:

- دوال تربيعية في ξ.
- $\sum_{i=1}^{3} N_i(\xi) = 1$، و $N_i^e(\xi_j) = \delta_{ij}\ ; i,j = 1,2,3$ (الشّكل(3−13)).





الشّكل(3−13) (تغير دالة شكل العنصر التربيعي في **(1-D)**)

iii. **تعميم:**

لو أخذنا العنصر **e** في **(1-D)** والذي هو عبارة عن قطعة مكونة من ***n*** عقدة x_i^e عندئذٍ تأخذ دوال قاعدة العقد شكل دوال استيفاء لاغرانج من الدرجة **(*n*-1)**:

$$N_k^e(x) = \frac{(x-x_1^e)\ldots(x-x_{k-1}^e)(x-x_{k+1}^e)\ldots(x-x_n^e)}{(x_k^e-x_1^e)\ldots(x_k^e-x_{k-1}^e)(x_k^e-x_{k+1}^e)\ldots(x_k^e-x_n^e)}\ ;\quad k = 1,..,n \qquad (3\text{−}34)\ldots$$

وغالباً ما يتمّ إيجاد دوال القاعدة للعنصر المرجعي على المجال **[-1,1]**، ثمّ تُعمم على أي عنصر **e** مُعرّف على المجال $[x_1, x_2]$ باستخدام التحويل الخطي التّالي:

$$[-1,1] \longrightarrow [x_1, x_2]$$
$$\xi \longmapsto a\xi + b$$

حيث: $b = \frac{x_2+x_1}{2}\ ,\ a = \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$.

ثانياً: عناصر قاعدة العقد في (2-D):

سندرس فيما يلي عنصرين أساسيين في المستوي هما العنصر المثلثي ***(triangular element)*** والعنصر المستطيل ***(rectangular element)*** ونبدأ الآن بالعنصر المثلثي.

i. **العنصر المثلثي الخطي بثلاث عقد *(triangular element)*:**

يتحدّد العنصر المثلثي في المستوي بثلاثة عقد، عقدة عند كل رأس، ويُمكن التعبير عن موضع نقطة $p(x,y)$ من هذا العنصر كما رأينا سابقاً بشكل تركيب خطي لإحداثيات العقد المعمّمة (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، (x_3, y_3) بإحداثيات المساحة ξ_1, ξ_2, ξ_3 كما يلي:

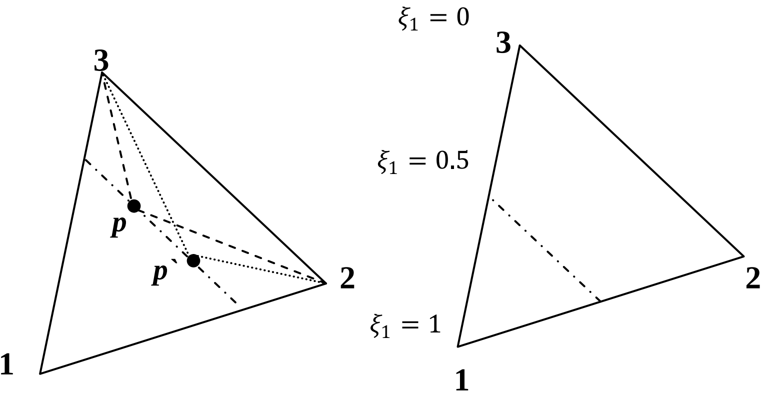
$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$$
$$y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \qquad (35\text{-}3)...$$

حيث أنّ: ξ_1, ξ_2, ξ_3 هي نسبة A_1, A_2, A_3 مساحات المثلثات الموضحة بالشّكل(3−6) إلى A مساحة المثلث الأصلي، أي أنّ:

$$\xi_1 = {}^{A_1}/_{A},\ \xi_2 = {}^{A_2}/_{A},\ \xi_3 = {}^{A_3}/_{A} \qquad (36\text{-}3)...$$

من هنا نلاحظ أن ξ_1, ξ_2, ξ_3 غير مستقلّة عن بعضها إنّما ترتبط بالعلاقة:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \qquad (37\text{-}3)...$$



الشّكل(3−14) (إحداثيات المساحة في العنصر المثلث)

تتوضّح بعض الخواص الهامة التي تتميز بها إحداثيات المساحة في الشّكل(3−14)، حيث نلاحظ أنّه لو أخذنا أي نقطتين **P`, P** من الخط المنقط، كانت مساحتا المثلثين المتشكّلين بهاتين النقطتين والعقدتين **(2)** و **(3)** متطابقتين، وذلك لأن هذين المثلثين لهما القاعدة نفسها والارتفاع نفسه، نضيف إلى ذلك أنه كلما اقترب هذا الخط المنقط من العقدة **(1)** ازدادت المساحة A_1 بشكل خطي حتى تأخذ القيمة A عند هذه العقدة **(1)**، من هنا نجد أن الإحداثي ξ_1 يأخذ قيمة ثابتة من أجل أي نقطة من المستقيم الموازي للضلع المقابلة للعقدة **(1)** ويتغير بشكل خطي بين القيمة واحد عند العقدة **(1)** والقيمة صفر عند الضلع المحدودة بالعقدتين **(2)** و **(3)** الشّكل(3−16)، وبمناقشة مماثلة من أجل ξ_3 و ξ_2 نستطيع أن نكتب:

الشكل(3−15) (التقريب الخطي لمتغير الحقل بعنصر مثلثي)

عند العقدة **(1):** $\xi_2 = \xi_3 = 0 \qquad \xi_1 = 1$

عند العقدة **(2):** $\xi_1 = \xi_3 = 0 \qquad \xi_2 = 1$ ...(38−3)

عند العقدة **(3):** $\xi_1 = \xi_2 = 0 \qquad \xi_3 = 1$

نلاحظ أن العلاقات(3−38) مطابقة تماماً للشّروط التي تحققها دوال الاستيفاء عند عقد العنصر المثلثي لذا فإنّه يُمكن التعبير عن متغير الحقل بواسطة إحداثيات المساحة كما يلي:

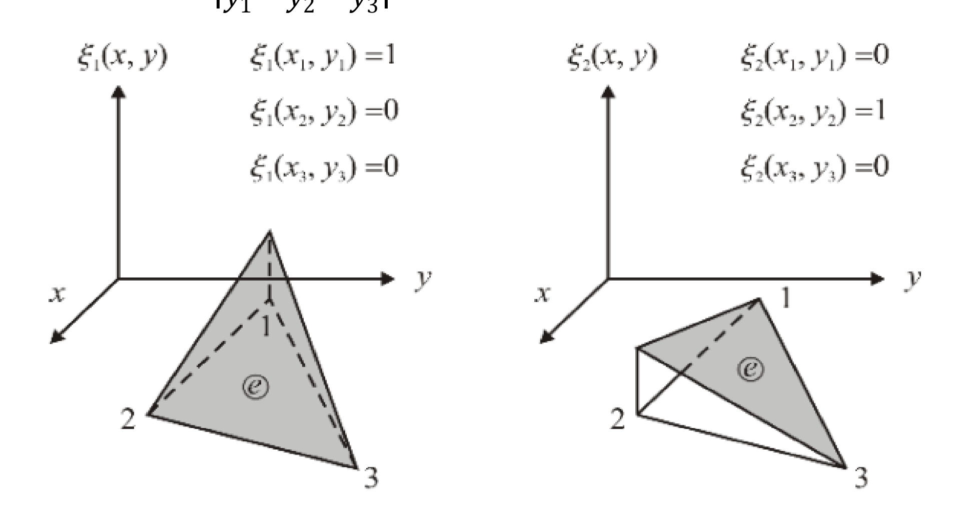
$$\phi^e(x,y) = \xi_1\phi_1^e + \xi_2\phi_2^e + \xi_3\phi_3^e \qquad ...(39-3)$$

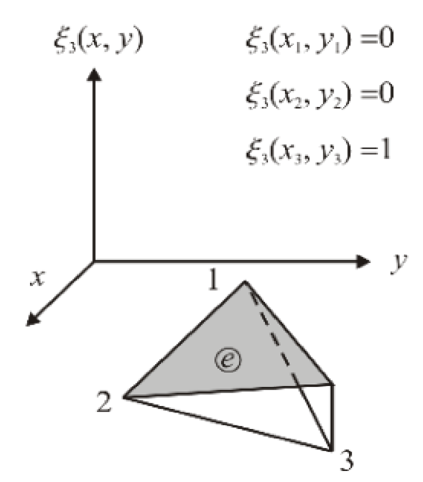
حيث أنّ:

$$\begin{Bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Bmatrix} = {}^1\!/_{2A}\begin{bmatrix}(x_2y_3 - x_3y_2) & (y_2 - y_3) & (x_3 - x_2)\\ (x_3y_1 - x_1y_3) & (y_3 - y_1) & (x_1 - x_3)\\ (x_1y_2 - x_2y_1) & (y_1 - y_2) & (x_2 - x_1)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ x\\ y\end{Bmatrix} \qquad ...(40-3)$$

و

$$2A = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix} \qquad ...(41-3)$$

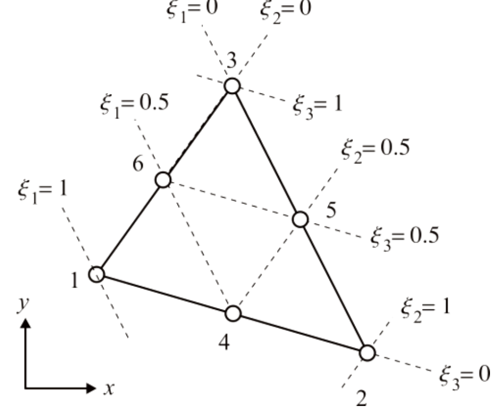




الشّكل(3−16) (تغيّر دوال الشّكل الخطيّة في العنصر المثلث)

ii. العنصر المثلثي التربيعي بست عقد:

يُعطى هذا العنصر بالشّكل(3−17) حيث تتوضّع العقد الثلاث الإضافية في منتصفات الأضلاع، ويُمكننا تعيين دوال الشّكل المرتبطة بكل عقدة بإتباع خطوات مماثلة لتلك التي سنتبعها من أجل $N_1(x,y) = N_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ ، إذ أنّه وكما نعلم يجب على هذه الدّالة أن تساوي الصفر عند جميع العقد ذوات الأرقام **(6 ,5 ,4 ,3 ,2)**، ونظراً لكون $\xi_1 = 1/2$ عند العقدتين **(4 و6)** فإنّنا نستنتج أنّ $(\xi_1 - \frac{1}{2})$ سوف يكون أحد عوامل N_1، وكذلك $\xi_1 = 0$ عند العقد ذوات الأرقام **(2,3,5)**، وهكذا نجد أنّ N_1 سيكون لها الشّكل التّالي: $N_1 = c\xi_1(\xi_1 - 1/2)$ (c ثابت)، وأخيراً بما أن $\xi_1 = 1$ عند العقدة**(1)** فإننا نجد أنّ: $N_1 = 2\xi_1\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right) = \xi_1(2\xi_1 - 1)$

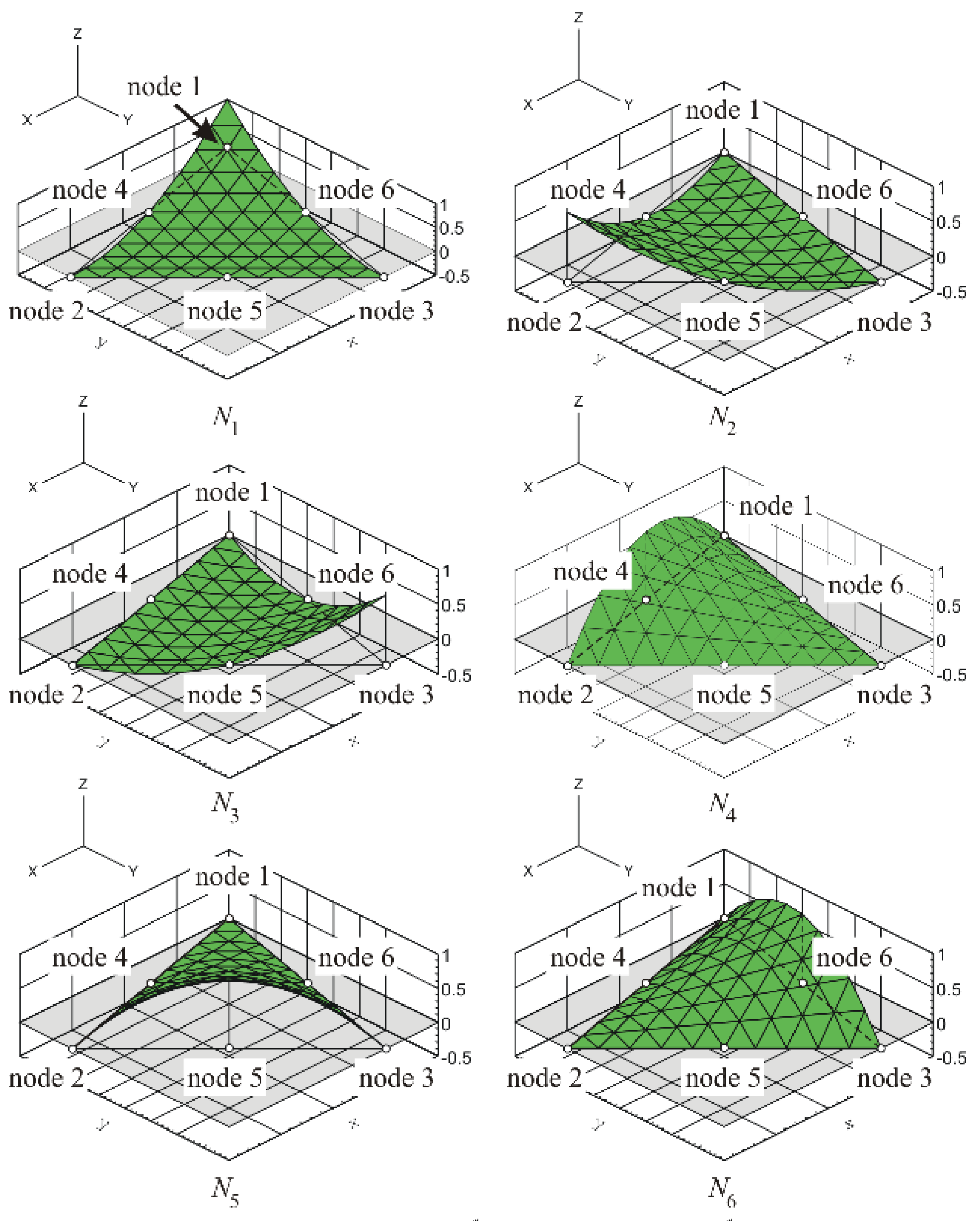


الشّكل(3−17) (تغيّر دوال الشّكل الخطيّة في العنصر المثلث)

وبمناقشة مماثلة نجد أنّ:

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1(2\xi_1 - 1) \\ N_2 &= \xi_2(2\xi_2 - 1) \\ N_3 &= \xi_3(2\xi_3 - 1) \\ N_4 &= 4\xi_1\xi_2 \\ N_5 &= 4\xi_2\xi_3 \\ N_6 &= 4\xi_1\xi_3 \end{aligned} \qquad (42-3)\ldots$$

وهكذا يُمكن استخدام نفس الإجرائية من أجل دوال استيفاء عناصر مثلثيّة من درجات أعلى.



الشّكل(3−18) (تغيّر دوال الشّكل التربيعية في العنصر المثلث)

iii. العنصر المستطيل الخطي(*Linear rectangular element*) :

يُمكن تقريب متغير الحقل ϕ^e في حالة العنصر رباعي الأضلاع في المستوي بدالة خطيّة في الإحداثيات المركزية (ξ,η) مبدؤها مركز الشّكل الرباعي (الشّكل (3−19)) الذي يحقّق:

$$-1 \leq \xi,\eta \leq 1$$

أي:

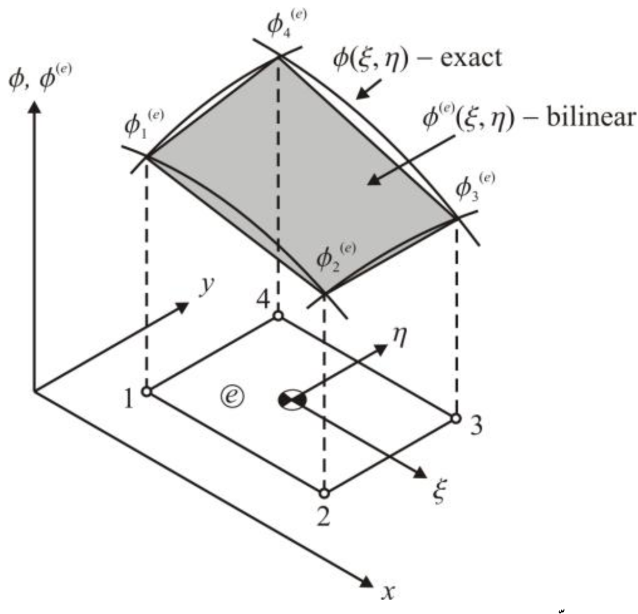
$$\phi^e(\xi,\eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \qquad ...(43-3)$$

نبدّل $\phi_1^e, \phi_2^e, \phi_3^e, \phi_4^e$ قيم الدّالة ϕ^e عند عقد المربع ثنائي الواحدة في (3−43) فنحصل على جملة المعادلات:

$$\begin{Bmatrix}\phi_1^e\\\phi_2^e\\\phi_3^e\\\phi_4^e\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{Bmatrix}\qquad (44-3)...$$

نُوجد حلّ جملة المعادلات هذه بالنسبة للمجاهيل a_1, a_2, a_3, a_4 فنجد أنّ:

$$\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{Bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&1&1&-1\\-1&-1&1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1^e\\\phi_2^e\\\phi_3^e\\\phi_4^e\end{Bmatrix}\qquad (45-3)$$



الشّكل(3−19) (تقريب متغير الحقل على عنصر مستطيل)

نبدّل في العلاقة (3−43) فنجد أنّ:

$$\phi^e(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)\phi_i^e\qquad (46-3)...$$

حيث أنّ:

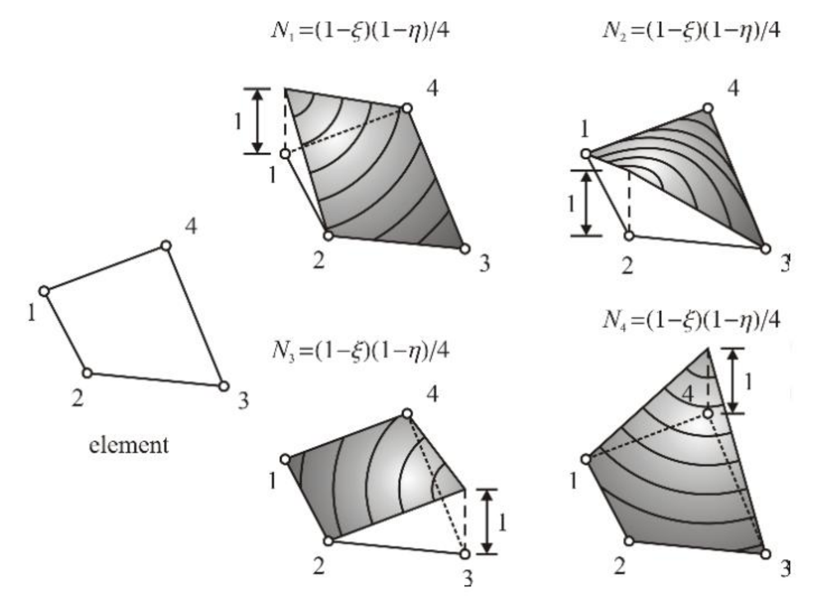
$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\qquad (47-3)...$$

حيث تمثّل ξ_i و η_i إحداثيات عقد الزوايا في جملة الإحداثيات المركزية.

نلاحظ من العلاقة (3−47) أنّ:

$$N_i(\xi_i,\eta_i)=\delta_{ij}$$
$$N_i(\xi,\eta)=N_i(\xi)N_i(\eta)$$

حيث أن $N_i(\xi)$ دالة الشّكل المعرّفة في حالة **(1-D)**.



الشّكل(3−20) (تغير دوال الشّكل في العنصر المستطيل)

نلاحظ أنّنا أوجدنا هنا دوال الشّكل في جملة الإحداثيات المركزية لعنصر المربع، ولكن ماذا لو كانت المنطقة المدروسة ذات محيط منحن، حينها قد لا يعطي استخدام العناصر ذات الأضلاع المستقيمة تمثيلاً جيداً للمنطقة المدروسة لذا ننتقل إلى أسرة من العناصر تُعرف باسم:

isoparametric elements.

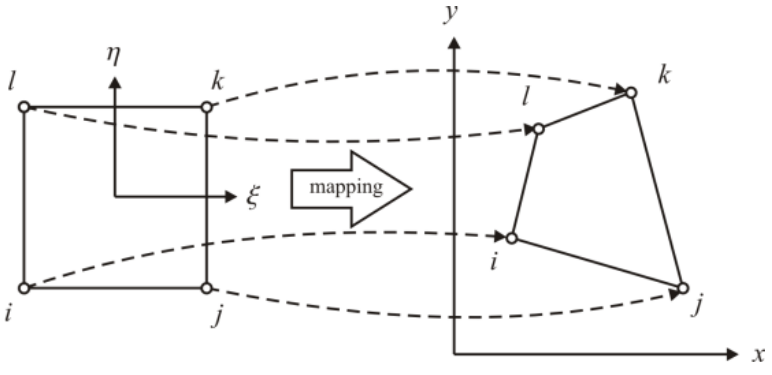
تعريف(3−2) [11,14]:

ليكن لدينا التطبيق $X: \Omega \to \Omega`$ المعرف بالعلاقة:

$$X(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta) X_i^e$$

حيث أن Ω العنصر المرجعي في جملة الإحداثيات الطبيعية، و $\Omega`$ العنصر في جملة الإحداثيات المعمّمة، و $\boldsymbol{n}$ عدد عقد العنصر، و $X_i^e = (x_i^e, y_i^e, z_i^e)$.

عندئذٍ إذا أمكن كتابة متغير الحقل ϕ^e بالشّكل: $\phi^e(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta,\zeta)\phi_i^e$ كان العنصران $\Omega, \Omega`$ ***isoparametric*** (الشّكل(3−21)).



الشّكل(3−21) (تطبيق من المربع ثنائي الواحدة إلى شكل رباعي اختياري)

وهكذا فإنه يُمكن اعتبار تمثيل شكل العنصر بدلالة دوال شكل خطيّة (أو غير خطيّة) ما هو إلا تطبيق يسمح بالانتقال من العنصر المرجعي البسيط في جملة الإحداثيات الموضعيّة إلى شكل آخر أكثر تعقيداً في جملة الإحداثيات المعمّمة، فيُمكننا مثلاً الحصول على شكل رباعي اختياري ذي حواف مستقيمة في جملة الإحداثيات المعمّمة (x,y) باستخدام تطبيقٍ معرفٍ على المربع ثنائي الواحدة في جملة الإحداثيات الطبيعية (ξ,η)، وفق العلاقة:

$$x=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_1+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_2+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_3+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_4=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)x_i \quad (48-3)...$$

$$y=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_1+\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_2+\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_3+\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_4=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)y_i \quad (49-3)...$$

حيث أنّ:

$$N_i(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi\,\xi_i)(1+\eta\,\eta_i) \quad (50-3)...$$

.iv العنصر المستطيل غير الخطي (*Nonlinear rectangular element*) :

إذا كان محيط العنصر منحنياً في جملة الإحداثيات المعمّمة عندئذٍ يُمكن استخدام دوال شكل تربيعية تربطه بالمربع ثنائي الواحدة في جملة الإحداثيات الطبيعية (ξ,η) (الشّكل(3−22)) ويُعطى هذا التطبيق بالعلاقات:

$$\begin{aligned} x&=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)x_i\\ y&=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)y_i \end{aligned} \quad (51-3)...$$

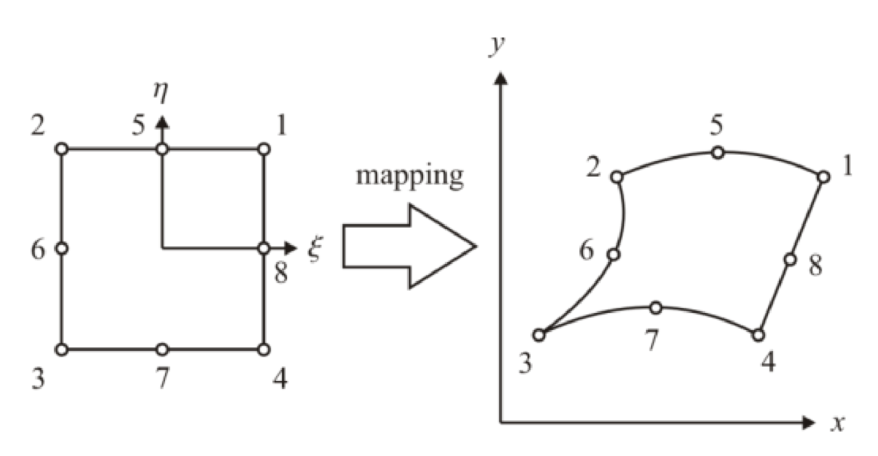
حيث أنّ:

$$N_1=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)-\frac{1}{2}(N_5+N_8)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \qquad N_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$
$$N_2=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)-\frac{1}{2}(N_5+N_6)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \qquad N_6=\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)-\frac{1}{2}(N_6+N_7)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \qquad N_7=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$
$$N_4=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)-\frac{1}{2}(N_7+N_8)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \qquad N_8=\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

نُضيف إلى ذلك أنّه في حالة المناطق غير منتظمة الشّكل (ذات المحيط المنحني) لن يكون من السهل مكاملة دوال الشّكل في مستوي الإحداثيات المعمّمة ***oxy*** لذا نستخدم مفهوم محدد جاكوبي "والذي هو عبارة عن تحويل مساحات أو حجوم مناطق غير متناهية في الصغر من جملة إحداثيات إلى أخرى" للانتقال إلى جملة الإحداثيات المركزية حيث يكون التكامل أسهل، فلو أخذنا العلاقات (3−10) نجد أنّها تعطينا تحويلاً بين جملة الإحداثيات المعمّمة ***(x,y)*** وجملة الإحداثيات الموضعيّة (ξ,η).

وبالتّالي يُمكن التعبير عن مشتقات N_i الجزئية بالنسبة لـــ ξ باستخدام القاعدة الصينية (***chain-rule***) للمشتقات الجزئية كما يلي:

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad (52\text{–}3)\ldots$$



الشّكل(3–22) (تطبيق من المربع ثنائي الواحدة إلى شكل رباعي محيطه منحنٍ)

وبشكل مشابه لو أخذنا المشتق الجزئي بالنسبة لـــ η نستطيع أن نكتب:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad (53\text{–}3)\ldots$$

وبما أنّه يُمكن التعبير عن المتغيرين (***x,y***) بدلالة الإحداثيات الموضعيّة (ξ,η)، فإنّه يُمكن إيجاد مصفوفة جاكوبي بدلالة الإحداثيات الموضعيّة، وبالتالي إذا أردنا إيجاد المشتقات الجزئية بالنسبة للمتحوّلين $\boldsymbol{x}$ و$\boldsymbol{y}$ فإننا لا نحتاج سوى إيجاد مقلوب مصفوفة جاكوبي لنجد أن:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

ويصبح من الممكن التعبير عن مساحة عنصر متناه في الصغر بالشّكل: $dxdy = det[J]d\xi d\eta$

وتكون عمليّة مُكاملة دوال الشّكل باستخدام جملة الإحداثيات الموضعيّة أسهل منها في جملة الإحداثيات المعمّمة إذ أنّها تصبح بالشّكل:

$$\iint dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} det[J]d\xi d\eta$$

ثالثاً: عناصر قاعدة العقد في (3-D):

ندرس في هذا الجزء من الفصل عنصرين أساسيين في الفراغ، هما العنصر رباعي الوجوه (*tetrahedral element*) والعنصر سداسي الوجوه (*hexahedral element*)، كما سنعرض دوال الشّكل في هذه الحالة بشيء من الإيجاز وذلك لأن طريقة استنتاجها مماثلة لحالة دوال الشّكل في المستوي (2-D) إلا أنها أكثر تعقيداً.

i. العنصر رباعي الوجوه (*tetrahedral element*):

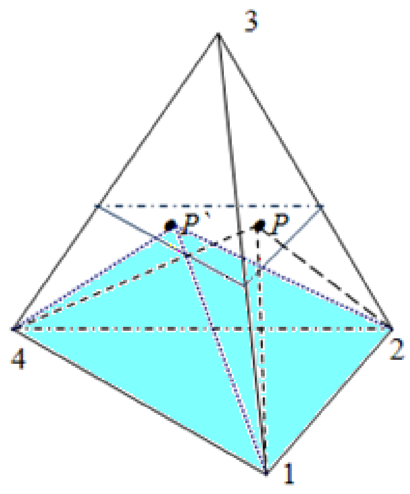
يوضّح الشّكل(3−23) رباعي وجوه بأربع عقد، سوف نستخدم هنا جملة إحداثيات الحجم وذلك لتبسيط عمليّة إيجاد دوال الشّكل، فلو أخذنا **P** نقطة من رباعي الوجوه عندئذٍ نحصل على أربع رباعيات وجوه جديدة، لها الحجوم التّالية:

$$V_1 = vol(P234) \quad ,V_2 = vol(P134)$$
$$V_3 = vol(P124) \quad ,V_4 = vol(P123)$$

وتكون إحداثيات الحجوم هي:

$$\xi_1 = V_1/V \qquad \xi_2 = V_2/V$$
$$\xi_3 = V_3/V \qquad \xi_4 = V_4/V$$

حيث أنّ $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V$ وبالتالي: $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1$



الشّكل(3−23) (إحداثيات الحجم في العنصر رباعي الوجوه)

تتوضّح بعض الخواص الهامة التي تتميز بها إحداثيات الحجم من خلال الشّكل(3−23)، فبفرض أنّ *p, p`* نقطتين من أي مستوٍ موازٍ للقاعدة (124) عندئذٍ يكون حجم رباعيي الوجوه المتشكلين من إحدى هاتين النقطتين والعقد **1,2,4** متطابقتين، كذلك فإنه كلما اقترب المستوي الموازي لتلك القاعدة من العقدة **3** كلما ازداد حجم رباعيي الوجوه آنفي الذكر بشكل خطي إلى أن يبلغا القيمة ***V*** عند تلك العقدة.

من هنا نجد أنّ الإحداثي ξ_3 يأخذ قيمة ثابتة من أجل أي نقطة من المستوي الموازي للقاعدة المقابلة للعقدة **(3)** ويتغير بشكل خطي بين القيمة واحد عند العقدة **(3)** والقيمة صفر عند الوجه المحدد بالعقد**(1)** و**(2)** و**(4)**، بمناقشة مماثلة من أجل ξ_1, ξ_2, ξ_4 نستطيع أن نكتب:

$$\xi_i(x_j, y_j, z_j) = \delta_{ij} \qquad i, j = 1,2,3,4$$

بما أن($\xi_i\ ; i = 1,2,3,4$) تحقق شروط دوال استيفاء لاغرانج فإنه يُمكن التعبير عن متغير الحقل بالشّكل:

$$\phi^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^{4} \xi_i(x, y, z)\phi_i^e \qquad (54\text{–}3)\ldots$$

حيث أنّ: ϕ_i^e هي قيم الدّالة ϕ عند عقد رباعي الوجوه.

ii. العنصر سداسي الوجوه (*hexahedral element*):

ندرس هنا حالة العنصر سداسي الوجوه بثمان عقد كما هو موضح بالشّكل(3–24)، حيث نقرِّب متغير الحقل بحدوديّة من الشّكل:

$$\phi^e(x, y, z) = a + bx + cy + dz + exy + fyz + gzx + hxyz$$

تتحدّد معاملاتها من خلال تعويض قيم ϕ^e عند العقد، إذ نحصل بهذه العمليّة على العبارة التّالية التي تعبّر عن متغير الحقل بدلالة دوال الشّكل:

$$\phi^e(x, y, z) = \sum_{i=1}^{8} N_i(x, y, z)\phi_i^e \qquad (55\text{–}3)\ldots$$

ولكنّ استنتاج دوال الشّكل بهذه الطّريقة ليس بالأمر السّهل إذ أنه يتطلب حل جملة مؤلفة من ثمان معادلات خطيّة بثمانية مجاهيل، لذا نلجأ إلى طريقة أخرى تعتمد على أن دوال الشّكل في **(3-D)** ما هي إلا جداء لدوال الشّكل باتجاه المحاور الثلاث لجملة الإحداثيات المنسوب إليها ذلك العنصر المدروس فمن أجل المكعب ثنائي الواحدة في الإحداثيات المركزية $\xi\eta\zeta$ نجد أنّ دوال الشّكل تُعطى بالشّكل التّالي:

$$\begin{aligned}
&N_1(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad N_5(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)\\
&N_2(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad N_6(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)\\
&N_3(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad N_7(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)\\
&N_4(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad N_8(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)
\end{aligned} \qquad (56\text{–}3)\ldots$$

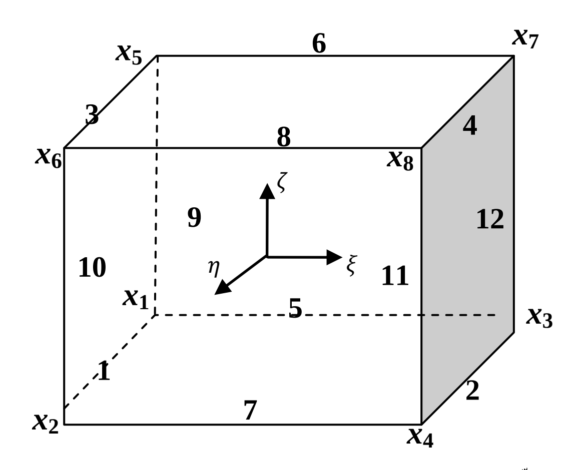
أو باختصار:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta)$$

حيث أنّ: (ξ_i, η_i, ζ_i) هي إحداثيات العقدة ***i***.

كما وترتبط جملة الإحداثيات المعمّمة (x, y, z) بجملة الإحداثيّات الطبيعية (ξ, η, ζ) بالعلاقة:

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta, \zeta)x_i\\
y &= \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta, \zeta)y_i\\
z &= \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta, \zeta)z_i
\end{aligned} \qquad (57\text{–}3)\ldots$$



الشّكل(3−24) (أرقام عقد وأضلاع متوازي المستطيلات)

وكما في حالة العناصر الرباعية في المستوي، نستخدم مصفوفة جاكوبي لإيجاد قيمة تكامل على منطقة ما بالاستفادة من دوال الشّكل في جملة الإحداثيات الطبيعية ، علماً أن مصفوفة جاكوبي **[J]** من المرتبة الثالثة تُعطى بالشّكل:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (58-3)\ldots$$

وهكذا يصبح من الممكن التعبير عن حجم العنصر **dV** بالشّكل:

$$dxdydz = det[J]\, d\xi d\eta d\zeta \quad (59-3)\ldots$$

3−2−4−2. عناصر قاعدة الأضلاع (*Edge- Based Elements*):

ندرس عناصر قاعدة الأضلاع من أجل العناصر نفسها التي قمنا بدراستها في حالة دوال قاعدة العقد، وهي العنصر المثلث والمستطيل في حالة **(2-D)**، والعنصرين رباعي الوجوه ومتوازي المستطيلات في حالة **(3-D)**.

أولاً: عناصر قاعدة الأضلاع في (2-D):

ندرس في هذا الجزء عناصر دوال قاعدة أضلاع المثلث والمستطيل.

i. **عناصر قاعدة أضلاع المثلث:**

لنفرض أن المنطقة المدروسة $\mathbf{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$ مجزّأة إلى مجموعة من المثلثات، عندئذٍ من أجل أيّ عنصر مثلثي K نُعرّف العنصر المنتهي (K,P,A) **[10,16]** حيث أنّ:

K : المثلث المدروس.

P : فضاء متجهي من الحدوديّات بعده منتهٍ.

$$P = \{u \in (P_1)^2 \ ; \ \vec{u}(x,y) = (a_1 - b_1 y, a_2 + b_1 x) \ ; a_i, b_i \in \mathbb{R}\} \quad (60-3)\ldots$$

A : مجموعة منتهية من الدّاليّات الخطيّة المعرفة على P تدعى بدرجات الحرية وتُعطى بالعلاقة:

$$\beta_j(w) = \int_{\alpha_i} \vec{w}.\vec{t_i}ds = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (61-3)...$$

حيث أنّ α_i هي إحدى أضلاع المثلث، و $\vec{t_i}$ هو شعاع واحدة مماس الضلع α_i، **ds** تفاضل الضلع α_i.

والآن ما هي دوال قاعدة أضلاع المثلث T_0 الذي رؤوسه (0,0),(0,1),(1,0) (الشّكل(3−25)) بدلالة كل من الإحداثيات المعمّمة والطبيعية وكيف يُمكن التحويل بينهما؟

ليكن K_0 : المثلث الذي تكون عقده النقاط: (0,0) ,(0,1) ,(1,0).

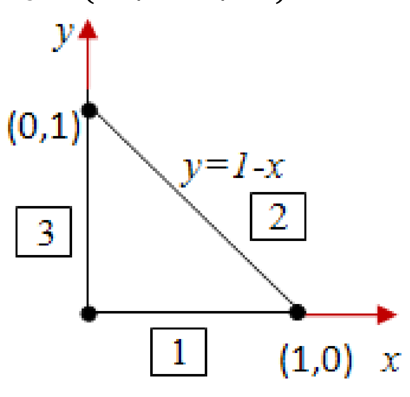
P_0 : فضاء متجهي من الحدوديّات ذو قاعدة منتهية.

$$P_0 = \{\vec{u} \in (P_1)^2 \ ; \vec{u}(x,y) = (a_1 - b_1 y, a_2 + b_1 x) \ ; a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

لتحديد دوال قاعدة الأضلاع $\vec{w_i}$ نأخذ $\vec{w} \in P_0$ ونُكامل وفق العلاقة(3−61) معتمدين على أرقام الأضلاع الموضّحة في الشّكل(3−25).

نلاحظ من الشّكل(3−25) أنّ:

$$\vec{t_1} = (1,0) \ , \ \vec{t_2} = (0,1) \ , \ \vec{t_3} = \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$$



الشّكل(3−25) (العنصر المرجعي للمثلث)

ويكون من أجل الضلع الأولى y=0 وبالتّالي:

$$equation(1) = \int_{edge\,(1)} (a_1 - b_1 y, a_2 + b_1 x).(1,0)ds = \int_0^1 a_1 dx = a_1$$

ثم نُوجد المعادلة الثّانية بإجراء التغيير التّالي:

نفرض أنّ: $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$ فتكون: $y = 1 - \frac{t}{\sqrt{2}}$

$$equation(2) = \int_{edge\,(2)} (a_1 - b_1 y, a_2 + b_1 x).\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) ds$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left(a_1 - b_1\left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right), a_2 + b_1\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt = -a_1 + a_2 + b_1$$

أمّا من أجل الضلع الأخيرة فيكون x=0 وبالتّالي:

$$equation(3) = \int_{edge\,(3)} (a_1 - b_1 y, a_2 + b_1 x).(0,1)ds = \int_0^1 a_2 dy = a_2$$

```
In[1]:=
p = {a1, a2, b1};
edge = {p[[1]] - p[[3]] y, p[[2]] + p[[3]] x};
t = {{1, 0}, {0, 1}, {-1, 1} / √2};
equation = Table[0, {i, 1, 3}];
equation[[1]] = Integrate[x = s; y = 0; edge.t[[1]], {s, 0, 1}]
equation[[2]] = Integrate[x = 0; y = s; edge.t[[2]], {s, 0, 1}]
equation[[3]] = Integrate[x = s / √2 ; y = 1 - s / √2 ; edge.t[[3]], {s, 0, √2 }]
Out[5]= a1
Out[6]= a2
Out[7]= -a1 + a2 + b1
```

نُوجد حلّ جملة المعادلات الخطيّة الناتجة مع مراعاة العلاقة (3−61) فنحصل على دوال قاعدة الأضلاع التّالية:

$$\overrightarrow{w_1^0} = (1 - y, x)$$
$$\overrightarrow{w_2^0} = (-y, x) \qquad (62-3)\dots$$
$$\overrightarrow{w_3^0} = (y, 1 - x)$$

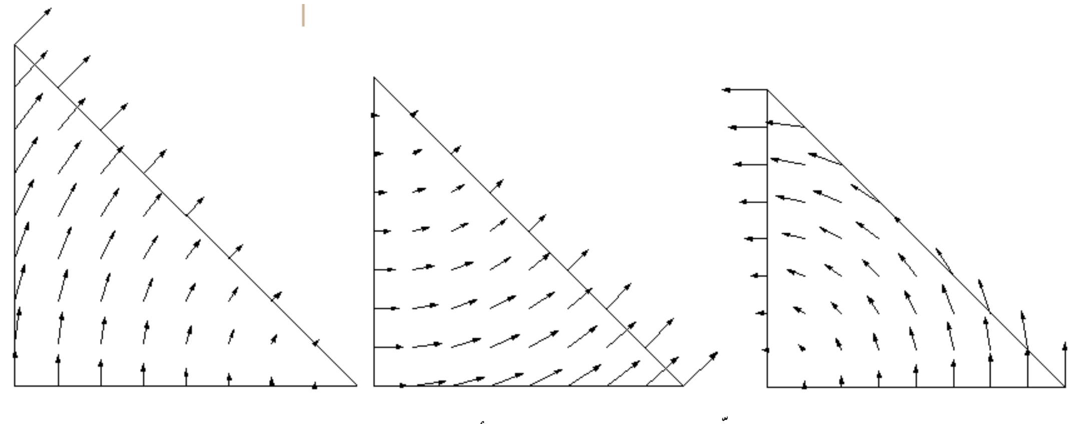
وهكذا يُمكن التعبير عن المتحول الشّعاعيّ $\vec{E}$ بدلالة قيم مركباته المماسيّة عند أضلاع المثلث بالعلاقة:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{w_i} E_i \qquad (63-3)\dots$$

حيث E_i المركبة المماسيّة للمتجه $\vec{E}$ على الضلع $\boldsymbol{i}$.

```
In[8]:=
B = Table[0, {i, 1, 3}, {j, 1, 3}];
For[i = 1, i ≤ 3, i++,
 For[j = 1, j ≤ 3, j++,
  B[[i, j]] = Coefficient[Expand[Simplify[equation[[i]]]], p[[j]]]]]
Print[B]
W = Table[0, {i, 1, 3}];
Do[k = Table[0, {j, 1, 3}];
 k[[i]] = 1;
 r = LinearSolve[B, k];
 x =.; y =.;
 W[[i]] = {r[[1]] - r[[3]] y, r[[2]] + r[[3]] x};
 Print["W[", i, "]=", W[[i]]], {i, 1, 3}]
{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {-1, 1, 1}}
W[1]={1 - y, x}
W[2]={y, 1 - x}
W[3]={-y, x}
```

```
<< Graphics`PlotField`
triangle = {Graphics[Line[{{0, 0}, {0, 1}}]], Graphics[Line[{{0, 0}, {1, 0}}]], Graphics[Line[{{1, 0}, {0, 1}}]]};
ttplot = Table[0, {i, 1, 3}];
Do[data = Table[0, {i, 1, 50}]; n = 0;
  Do[x = i / 8; Do[y = j / 8;
    If[x + y ≤ 1, n = n + 1; data[[n]] = {{x, y}, W[[s]]}], {j, 0, 8}], {i, 0, 8}];
  data = Drop[data, -(50 - n)];
  ttplot[[s]] = Show[ListPlotVectorField[data, VectorHeads → True, ScaleFactor → 0.15]
    , triangle],
  {s, 1, 3}];
```



الشّكل(3−26) (دوال قاعدة أضلاع عنصر المثلث)

الآن وبعد أن أوجدنا دوال قاعدة أضلاع المثلث المرجعي دعونا نبحث كيف يُمكن أن نستعين بها في عمليّة إيجاد دوال قاعدة أضلاع أيّ مثلّث آخر.

١. تحويل دوال قاعدة أضلاع أيّ مثلث T إلى المثلث T_0:

لنبحث الآن عن كيفيّة كتابة عناصر قاعدة أضلاع المثلث السابق بدلالة جملة الإحداثيات الطبيعية انطلاقاً من شكلها في جملة الإحداثيات المعمّمة وبالعكس.

a) الانتقال من جملة الإحداثيات المعمّمة إلى جملة إحداثيات المساحة:

تُعطى عناصر قاعدة أضلاع هذا المثلث T_0 بدلالة الإحداثيات المعمّمة كما في العلاقات (3−62)، وترتبط إحداثيات المساحة بالإحداثيات المعمّمة وفق العلاقات(3−5)، فإذا بدّلنا العلاقات(3−5) وإحداثيّات رؤوس المثلث في(3−62) فنجد أنّ دوال قاعدة الأضلاع تكتب بالشّكل:

$$\overrightarrow{w_1^0} = (1-\xi_3, \xi_2) = (\xi_1+\xi_2, \xi_2)$$
$$\overrightarrow{w_2^0} = (-\xi_3, \xi_2) \qquad (3-63)\ldots$$
$$\overrightarrow{w_3^0} = (\xi_3, 1-\xi_2) = (\xi_3, \xi_1+\xi_3)$$

نُوجد الآن إحداثيات المساحة من أجل المثلث السابق:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{2A} = 1-x-y \implies \nabla\xi_1 = (-1,-1)$$

$$\xi_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix}}{2A} = x \qquad \Longrightarrow \quad \nabla\xi_2 = (1,0)$$

$$\xi_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix}}{2A} = y \qquad \Longrightarrow \quad \nabla\xi_3 = (0,1)$$

وبالتّالي:

$$(64\text{–}3)\ldots \qquad \begin{aligned} (\xi_1\nabla\xi_2 - \xi_2\nabla\xi_1) &= (\xi_1 + \xi_2, \xi_2) \\ (\xi_2\nabla\xi_3 - \xi_3\nabla\xi_2) &= \ (-\xi_3, \xi_2) \\ (\xi_1\nabla\xi_3 - \xi_3\nabla\xi_1) &= (\xi_3, \xi_1 + \xi_3) \end{aligned}$$

بالمقارنة بين $(63\text{–}3)$ و$(64\text{–}3)$ نلاحظ أنه من أجل العنصر $\mathbf{T_0}$ يُمكن إيجاد دوال قاعدة الأضلاع مباشرة بدلالة إحداثيات المساحة وذلك باستخدام العلاقات:

$$(65\text{–}3)\ldots \qquad \overrightarrow{w_i^0} = \left(\xi_i\nabla\xi_j - \xi_j\nabla\xi_i\right) \qquad i,j = 1,2,3$$

b) **الانتقال من جملة إحداثيات المساحة إلى جملة الإحداثيات المعمّمة:**

نبدّل الدّوال ξ_1, ξ_2, ξ_3 في العلاقات $(64\text{–}3)$ فنجد أنّ:

$$(\xi_1\nabla\xi_2 - \xi_2\nabla\xi_1) = [(1-x-y)(1,0) - x(-1,-1)]$$
$$= (1-y, x) = \overrightarrow{w_1^0}$$
$$(\xi_2\nabla\xi_3 - \xi_3\nabla\xi_2) = (-y, x) = \overrightarrow{w_2^0}$$
$$(\xi_1\nabla\xi_3 - \xi_3\nabla\xi_1) = (y, 1-x) \ = \overrightarrow{w_3^0}$$

ملاحظة: إنّ دوال قاعدة الأضلاع في العلاقة $(65\text{–}3)$ غير منظمة لذا يتم ضرب كل منها بطول الضلع المرتبطة بها، كي تتحول إلى دوال قاعدة منظمة أي أنها تكتب بالشكل:

$$(65\text{–}3)'\ldots \qquad \overrightarrow{w_i^0} = l_{ij}\left(\xi_i\nabla\xi_j - \xi_j\nabla\xi_i\right) \qquad i,j = 1,2,3$$

حيث أن l_{ij} هو طول الضلع الواصلة بين العقدتين ***i,j*** .

```
<< Calculus`VectorAnalysis`
x1 = 0; y1 = 0; x2 = 1; y2 = 0; x3 = 0; y3 = 1;
ξ1 = Det[{{1, 1, 1}, {X, x2, x3}, {Y, y2, y3}}] / A; ξ2 = Det[{{1, 1, 1}, {x1, X, x3}, {y1, Y, y3}}] / A; ξ3 = Det[{{1, 1, 1}, {x1, x2, X}, {y1, y2, Y}}] / A;
A = Det[{{1, 1, 1}, {x1, x2, x3}, {y1, y2, y3}}];
Do[∇ξi = Grad[ξi, Cartesian[X, Y, Z]], {i, 1, 3}];
Li[i_, j_] := Sqrt[(xi - xj)^2 + (yi - yj)^2];
W1 = Simplify[Li[1, 2] (N1 ∇ξ2 - N2 ∇ξ1)];
W2 = Simplify[Li[2, 3] (N2 ∇ξ3 - N3 ∇ξ2)];
W3 = Simplify[Li[1, 3] (N1 ∇ξ3 - N3 ∇ξ1)];
Do[wi = Delete[Wi, 3], {i, 3}];
Do[Print["w[", i, "]=", wi], {i, 3}]

w[1]={N1 + N2, N2}
w[2]={-√2 N3, √2 N2}
w[3]={N3, N1 + N3}
```

نتيجة(3-1):

نلاحظ مما سبق أنه يُمكن إيجاد دوال قاعدة أضلاع المثلث T_0 والمولدة للفضاء P باستخدام الدّوال(3−65َ).

٢. تحويل دوال قاعدة أضلاع المثلث T_0 إلى أي مثلث آخر T:

لاحظنا أن إيجاد دوال قاعدة أضلاع المثلث T_0 لن يكون صعباً بالمقارنة مع عمليّة إيجاد دوال قاعدة مثلث آخر لا تنطبق أيٌّ من أضلاعه على المحاور الإحداثية، ولكن هذه الصعوبة حالما تزول إذا استخدمنا العلاقات التي تربط بين جملتي إحداثيات المساحة والإحداثيات المعمّمة، وذلك يتوضح من خلال ما يلي:

يُمكننا كتابة العلاقات (3−6) مباشرة بالشّكل التّالي:

$$x(\xi_1,\xi_2) = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad 1-\xi_1-\xi_2]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$y(\xi_1,\xi_2) = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad 1-\xi_1-\xi_2]\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

وبالتّالي فإنّ مصفوفة تحويل جاكوبي تُعطى بالعلاقة:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{dy}{d\xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{dy}{d\xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1-x_3) & (y_1-y_3) \\ (x_2-x_3) & (y_2-y_3) \end{bmatrix} \qquad (66-3)...$$

ومنه يُمكن مباشرة إيجاد قاعدة أضلاع أي عنصر مثلثي باستخدام التحويل **[16]**:

$$\overrightarrow{w_i} = J^{-1}\,\overrightarrow{w_i^0}$$

حيث أنّ $\overrightarrow{w_i^0}$ هي دوال قاعدة أضلاع T_0، و $\overrightarrow{w_i}$ دوال قاعدة أضلاع أي مثلث اختياري.

مثال(3−2): أوجد دوال قاعدة أضلاع المثلث الذي رؤوسه: **(0,1),(1,-1),(-1,-1)**.

```
x1 = -1; x2 = 1; x3 = 0; y1 = -1; y2 = -1; y3 = 1;
jac = Table[{xi - x3, yi - y3}, {i, 2}]
w = Table[Null, {i, 3}];
Do[w[[i]] = Simplify[Inverse[jac].W[[i]]]; Print["W[", i, "]=", w[[i]]], {i, 3}]

{{-1, -2}, {1, -2}}
```

$W[1]=\left\{\frac{1}{2}(-1+x+y),\ \frac{1}{4}(-1-x+y)\right\}$

$W[2]=\left\{\frac{1}{2}(1-x-y),\ \frac{1}{4}(-1+x-y)\right\}$

$W[3]=\left\{\frac{x+y}{2},\ \frac{1}{4}(-x+y)\right\}$

ii. عناصر قاعدة أضلاع المستطيل:

لنفرض أنّنا قمنا بتجزئة المنطقة Ω إلى مجموعة من الأشكال الرباعيّة، عندئذٍ من أجل أي شكلٍ رباعي نُعرّف عنصراً منتهياً (K, P, A) حيث أن:

K : العنصر ذو الشّكل الرّباعي.

P : فضاء متجهي من الحدوديّات بعده منتهٍ.

A : مجموعة منتهية من الدّاليّات الخطيّة المُعرّفة على P وتُدعى بدرجات الحريّة.

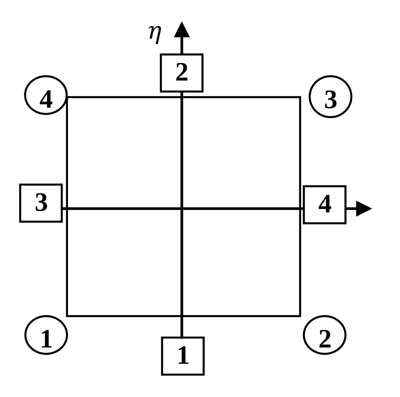
نُشير إلى أنّنا لا نقصد بالعنصر المستطيل الأشكال التي لها شكل مستطيل فقط بل نقصد بها جميع المضلّعات الرّباعية، إذ أنّه من أجل أيّ شكل رباعيٍّ يُمكن استخدام تحويل ث نائي الخطيّة B يسمح بالانتقال من هذا الشّكل رباعيّ الأضلاع إلى المربّع ثنائي الواحدة:

$$K_0 = \{-1 \le \xi, \eta \le 1\}$$

ويُعرّف هذا التحويل بالشّكل:

$$B(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi, \eta)\overrightarrow{x_i}$$

علماً أنّ $\overrightarrow{x_i} = (x_i, y_i)$ إحداثيات عقد الشّكل الرباعي، أمّا N_i فهي دوال الاستيفاء من أجل المربّع ثنائي الواحدة(الشّكل(3−27)) في المستوي وتُعطى بالعلاقات(3−50).



الشّكل(3−27)

(الأرقام الموضعيّة لعقد وأضلاع مربّع الواحدة)

رقم الضلع	العقدة الأولى	العقدة الثانية
1	1	2
2	4	3
3	1	4
4	2	3

الجدول(3−1)

(الأرقام الموضعيّة لعقد وأضلاع المربّع ثنائي الواحدة)

لنُعرّف العنصر المنتهي على العنصر المرجعي بالثلاثية (K_0, P_0, A_0) حيث A_0 مجموعة منتهية من الدّاليات الخطيّة المعرّفة على P_0.

سوف نستخدم نموذج نيديليك ***(Nedelec-type)*** لدرجات الحريّة **[10,16]** ، والذي تُعطى درجات الحريّة فيه بالعلاقة:

$$\beta_j(\overrightarrow{w}) = \int_{a_i} (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{t_i}) d\alpha \quad , \overrightarrow{w} \in P_0 \qquad (68-3) \ldots$$

حيث:

$$P_0 = \{\vec{u} = [u_1, u_2]^t : u_1 \in Q_{0,1}, u_2 \in Q_{1,0}\} \qquad (69-3)\ldots$$

و $Q_{l,m}$ الفضاء الشّعاعيّ للحدوديّات بمتغيّرين (ξ,η) ، والتي هي من الدرجة l على الأكثر بالنسبة للمتغير ξ ، ومن الدرجة m على الأكثر بالنسبة للمتغير η ، أمّا $\vec{t_i}$ فهو شعاع واحدة المماس للضلع a_i،

وتحقق دوال قاعدة الفضاء P_0:

$$(70-3)\ldots \qquad \begin{cases} \beta_i(\vec{w}) = 1 \\ \beta_j(\vec{w}) = 0 \quad j \neq i, \quad i,j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

نلاحظ أن بعد P_0 يساوي(4) وهو مساوٍ لعدد رؤوس المربّع.

نجد من تعريف P_0 **(3−69)** أنّه أياً كانت $\vec{w} \in P_0$ يكون لها الشّكل:

$$(71-3)\ldots \qquad \vec{w} = (d_1 + a_1\,\eta, d_2 + a_2\,\xi)$$

والآن لإيجاد دالة القاعدة من أجل الضلع $\boldsymbol{i}$ نبدل عبارة $\vec{w}$ في **(3−70)** ثم نحلّ جملة المعادلات الناتجة، فمثلاً من أجل الضلع **(1)** نأخذ $i = 1$ و $\vec{t_1} = (1,0)$، علماً أنّ $\eta = -1$ عند الضلع**(1)**، عندئذٍ نحصل على جملة المعادلات الخطيّة:

$$\begin{aligned} 2(d_1 - a_1) = 1 \\ 2(d_1 + a_1) = 0 \\ 2(d_2 - a_2) = 0 \\ 2(d_2 + a_2) = 0 \end{aligned}$$

نحلّ جملة المعادلات السّابقة فنجد أنّ: $d_1 = -a_1 = \frac{1}{4}, d_2 = a_2 = 0$

وبالتّالي فإنّ دالة القاعدة الموافقة للضلع الأولى هي:

$$\overrightarrow{W_1^0} = \frac{1}{4}(1-\eta,0)^T$$

وهكذا يُمكن وبطريقة مشابهة إيجاد دوال القاعدة من أجل جميع أضلاع المربّع ثنائي الواحدة:

$$\overrightarrow{W_1^0} = \frac{1}{4}(1-\eta,0)^T \quad \overrightarrow{W_3^0} = \frac{1}{4}(0,1-\xi)^T$$
$$\overrightarrow{W_2^0} = \frac{1}{4}(1+\eta,0)^T \quad \overrightarrow{W_4^0} = \frac{1}{4}(0,1+\xi)^T$$

لكن كما ذكرنا سابقاً يجب أن تردّ دوال القاعدة هذه والمعرّفة من أجل العنصر المرجعي المربّع إلى دوال قاعدة معرفة من أجل أي شكل رباعي، وهذا يتمّ وفق التحويل التّالي:

$$(72-3)\ldots \qquad \overrightarrow{w_j} = J^{-1}\overrightarrow{W_j^0}$$

حيث أن J هي مصفوفة جاكوبي للتحويل B والتي يُمكن استنتاجها كما يلي:

لدينا:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix}$$

ومنه يكون:

$$(73-3)\ldots \qquad [J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi}\\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{bmatrix}$$

خواص الدوال $\overrightarrow{W_j^0}$:

- تضمن دوال القاعدة $\overrightarrow{W_j^0}$ استمرار المركبة المماسيّة للحقل على محيط العناصر الدّاخليّة إذ أنّها تأخذ قيمة مساوية للواحد عند الضلع $\boldsymbol{i}$ وتساوي الصفر عند الأضلاع الأخرى.
- $\overrightarrow{W_j^0}$ ذات تباعد حر ضمن العنصر أي: $\nabla.\overrightarrow{W_j^0}=0$.
- $\nabla\times\overrightarrow{W_j^0}=c\neq 0$ حيث $\boldsymbol{c}$ عدد ثابت.

ثانياً: عناصر قاعدة الأضلاع في (3-D):

i. عناصر قاعدة أضلاع رباعي الوجوه:

لنفرض أن المنطقة المدروسة $\Omega\subseteq R^3$ مجزأة إلى مجموعة من رباعيات الوجوه، عندئذٍ من أجل أيّ عنصر K نُعرّف العنصر المنتهي (K,P,A) **[10]** حيث أنّ:

K : رباعي الوجوه.

P : فضاء متجهي من الحدوديّات بعده منتهٍ.

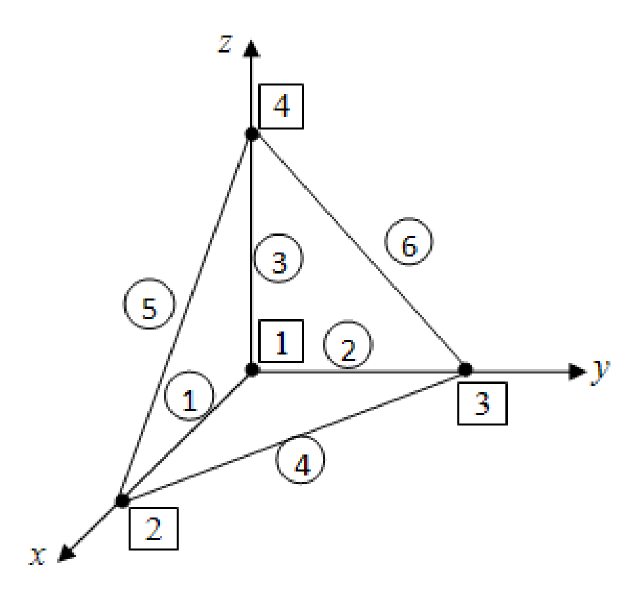
$$P=\left\{\vec{u}\in(P_1)^3\ ;u(\vec{x})=\vec{a}+\vec{b}\times\vec{x}\ ;\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3,\vec{x}=(x,y,z)\right\}$$

$$P=\{\vec{u}=(a_1-b_3y+b_2z,a_2+b_3x-b_1z,a_3-b_2\,x+b_1y)\ \ ;a_i,b_i\in\mathbb{R}\}$$
(74-3)...

A : مجموعة منتهية من الداليات الخطيّة المُعرّفة على **P** تُدعى بدرجات الحرية وتُعطى هنا أيضاً بالعلاقة:

$$(75-3)\ldots \qquad \beta_j(\vec{w})=\int_{\alpha_i}\vec{w}.\vec{t_i}ds=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

حيث أن $\boldsymbol{a_i}$ هي إحدى أضلاع المثلث، و $\vec{t_i}$ هو شعاع واحدة مماس الضلع $\boldsymbol{a_i}$، **ds** تفاضل الضلع $\boldsymbol{a_i}$.



الشّكل (3−28) (الأرقام الموضعيّة لعقد وأضلاع رباعي الوجوه)

رقم الضلع	العقدة الأولى	العقدة الثانية
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	4	2
6	3	4

الجدول (3−2) (الأرقام الموضعيّة لعقد وأضلاع رباعي الوجوه)

ما هي دوال قاعدة أضلاع رباعي الوجوه h_0 الذي رؤوسه $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ بدلالة كل من الإحداثيات المعمّمة والطبيعية وكيف يُمكن التحويل بينهما؟؟

ليكن:

K_0 : رباعي الوجوه h_0 الذي رُقّمت أضلاعه وعقده وفق الجدول(3−2).

P_0 : فضاء متجهي من الحدوديّات ذو قاعدة منتهية.

$$P_0 = \{\vec{u} = (a_1 - b_3 y + b_2 z, a_2 + b_3 x - b_1 z, a_3 - b_2\, x + b_1 y)\ ;\ a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

لتحديد w_i دوال قاعدة الأضلاع نأخذ $w \in P_0$ ونكامل وفق العلاقة (3−75) بعد ملاحظة أنّ:

$$\vec{t_1} = (1,0,0) \quad \vec{t_4} = (-1,1,0)/\sqrt{2}$$
$$\vec{t_2} = (0,1,0) \quad \vec{t_5} = (-1,0,1)/\sqrt{2}$$
$$\vec{t_3} = (0,0,1) \quad \vec{t_6} = (0,-1,1)/\sqrt{2}$$

من أجل الضلع الأولى يكون $y = z = 0$ وبالتّالي:

$$equation(1) = \int_0^1 (a_1 - b_3 y + b_2 z, a_2 + b_3 x - b_1 z, a_3 - b_2 x + b_1 y).(1,0,0)ds$$
$$= \int_0^1 a_1 dx = a_1$$

أمّا من أجل الضلع الثانية فيكون $x=z=0$ وبالتّالي:

$$equation(2) = \int_0^1 (a_1 - b_3 y + b_2 z, a_2 + b_3 x - b_1 z, a_3 - b_2 x + b_1 y).(0,1,0)ds$$
$$= \int_0^1 a_2 dy = a_2$$

وعند الضلع الثالثة يكون $x=y=0$:

$$equation(3) = \int_0^1 (a_1 - b_3 y + b_2 z, a_2 + b_3 x - b_1 z, a_3 - b_2 x + b_1 y).(0,0,1)ds$$
$$= \int_0^1 a_3 dz = a_3$$

أمّا من أجل الضلع الرابعة فنجري تغييراً في المتحوّل كما يلي:

نفرض أنّ: $y = t/\sqrt{2}$ فيكون: $z = 0\ \&\ x = 1 - t/\sqrt{2}$.

$$equation(4) = \int_0^1 (a_1 - b_3 y + b_2 z, a_2 + b_3 x - b_1 z, a_3 - b_2 x + b_1 y).\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}dt$$
$$= 1/\sqrt{2} \int_0^{/\sqrt{2}} (-a_1 + a_2 + b_3)dt = -a_1 + a_2 + b_3$$

وكذلك نفرض من أجل الضلع الخامسة أنّ:

$z = t/\sqrt{2}$ فيكون: $y = 0\ \&\ x = 1 - t/\sqrt{2}$

$$equation(5) = \int_0^1 (a_1 - b_3 y + b_2 z, a_2 + b_3 x - b_1 z, a_3 - b_2 x + b_1 y).\frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}dt$$
$$= 1/\sqrt{2} \int_0^{/\sqrt{2}} (-a_1 + a_3 - b_2)dt = -a_1 + a_3 - b_2$$

وأخيراً نأخذ في الضلع السادسة:

$z = t/\sqrt{2}$ فيكون: $x = 0\ \&\ y = 1 - t/\sqrt{2}$

$$equation(6) = \int_0^1 (a_1 - b_3 y + b_2 z, a_2 + b_3 x - b_1 z, a_3 - b_2 x + b_1 y).\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}dt$$
$$= 1/\sqrt{2} \int_0^{/\sqrt{2}} (-a_2 + a_3 + b_1)dt = -a_2 + a_3 + b_1$$

نُوجد حلَّ جملة المعادلات الخطيّة الناتجة مع ملاحظة العلاقة (75−3) فنحصل على دوال قاعدة الأضلاع التّالية:

(76−3)...
$$\overrightarrow{w_1^0} = (1 - y - z, x, x) \quad \overrightarrow{w_4^0} = (-y, x, 0)$$
$$\overrightarrow{w_2^0} = (y, 1 - x - z, y) \quad \overrightarrow{w_5^0} = (-z, 0, x)$$
$$\overrightarrow{w_3^0} = (z, z, 1 - x - y) \quad \overrightarrow{w_6^0} = (0, -z, y)$$

وهكذا يُمكن التعبير عن المتحول الشّعاعيّ $\vec{E}$ بدلالة قيم مركباته المماسيّة عند أضلاع رباعي الوجوه بالعلاقة:

(77−3)...
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{6} \overrightarrow{w_i} E_i$$

حيث E_i المركبات المماسيّة للمتجه $\vec{E}$ على الأضلاع، أمّا برمجياً فيتمّ ذلك كما يلي:

```
A = {a1, a2, a3, b1, b2, b3};
H = Table[A[[i]], {i, 3}]; U = Table[A[[i]], {i, 4, 6}];
edge = H + Cross[U, {x, y, z}];
t = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {-1, 1, 0}/√2, {-1, 0, 1}/√2, {0, -1, 1}/√2};
equation = Table[0, {i, 1, 6}];
equation[[1]] = Integrate[x = s; y = 0; z = 0; edge.t[[1]], {s, 0, 1}]
equation[[2]] = Integrate[x = 0; y = s; z = 0; edge.t[[2]], {s, 0, 1}]
equation[[3]] = Integrate[x = 0; y = 0; z = s; edge.t[[3]], {s, 0, 1}]
equation[[4]] = Integrate[x = 1 - s/√2; y = s/√2; z = 0; edge.t[[4]], {s, 0, √2}]
equation[[5]] = Integrate[x = 1 - s/√2; y = 0; z = s/√2; edge.t[[5]], {s, 0, √2}]
equation[[6]] = Integrate[x = 0; y = 1 - s/√2; z = s/√2; edge.t[[6]], {s, 0, √2}]

a1

a2

a3

-a1 + a2 + b3

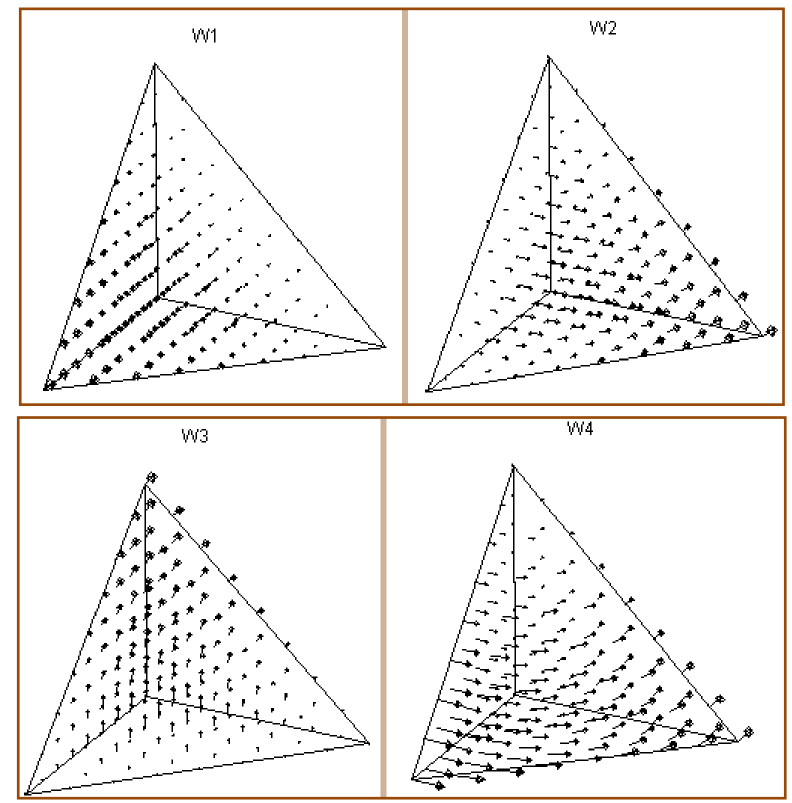
-a1 + a3 - b2

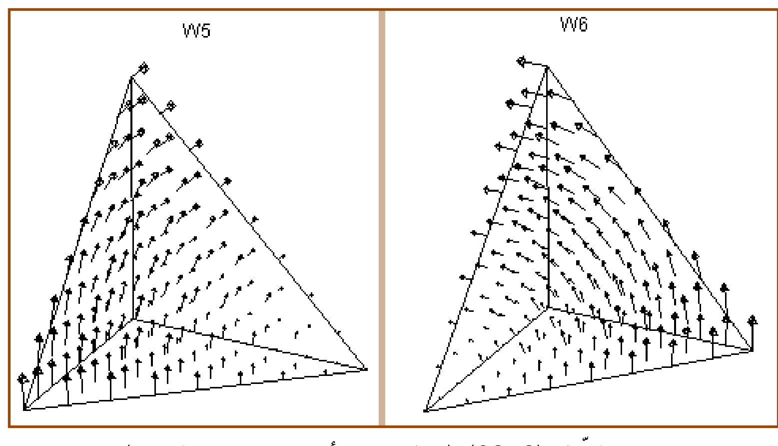
-a2 + a3 + b1
```

```
B = Table[0, {i, 1, 6}, {j, 1, 6}];
For[i = 1, i ≤ 6, i++,
  For[j = 1, j ≤ 6, j++,
   B[[i, j]] = Coefficient[Expand[Simplify[equation[[i]]]], A[[j]]]]];
W = Table[0, {i, 1, 6}];
Do[ F = Table[0, {j, 1, 6}];
  F[[i]] = 1;
  s = LinearSolve[B, F];
  x =.; y =.; z =.;
  W[[i]] =
   {s[[1]] - s[[6]] y + s[[5]] z, s[[2]] + s[[6]] x - s[[4]] z, s[[3]] + s[[4]] y - s[[5]] x};
  Print["W[", i, "]=", W[[i]]],
  {i, 1, 6}];
W[1]={1 - y - z, x, x}
W[2]={y, 1 - x - z, y}
W[3]={z, z, 1 - x - y}
W[4]={-y, x, 0}
W[5]={-z, 0, x}
W[6]={0, -z, y}
```

ولرسم هذه الدوال يُمكننا استخدام البرنامج التّالي:

```
In[15]:=
<< Graphics`PlotField3D`
tetrahedron = Graphics3D[Line[{{0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {0, 1, 0},
      {0, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}, {1, 0, 0}}]];
tetplot = Table[0, {i, 1, 6}];
For[e = 1, e ≤ 6, e++, data = Table[0, {i, 1, 500}]; n = 0;
  For[i = 1, i ≤ 10, i++, x = i / 10;
   For[j = 1, j ≤ 10, j++, y = j / 10;
    For[k = 1, k ≤ 10, k++, z = k / 10;
     If[x + y + z ≤ 1, n = n + 1; data[[n]] = {{x, y, z}, W[[e]]}]]]];
  data = Drop[data, -(500 - n)];
  tetplot[[e]] =
   Show[ListPlotVectorField3D[data, VectorHeads → True, ScaleFactor → .15,
     PlotLabel → StringJoin["W", ToString[ii]], ViewPoint → {10, 5, 5},
     (*SphericalRegion→True*)
     BoxRatios → {1, 1, 1},
     Boxed → False, DefaultFont → {"Heavetica", 12}], tetrahedron]];
Display["Plot1.ps", GraphicsArray[{{tetplot[[1]], tetplot[[2]]},
    {tetplot[[3]], tetplot[[4]]},
    {tetplot[[5]], tetplot[[6]]}}]];
```





الشّكل (3−29) (دوال قاعدة أضلاع رباعي الوجوه)

الآن وبعد أن أوجدنا دوال قاعدة أضلاع رباعي الوجوه المرجعي نقوم بدراسة كيفيّة الاستعانة بها في عمليّة إيجاد دوال قاعدة أضلاع أيّ رباعي وجوه آخر.

١ً. عناصر قاعدة أضلاع رباعي الوجوه h_0 بين جملتي الإحداثيات الطبيعية والمعمّمة:

لنبحث الآن عن كيفية كتابة عناصر قاعدة أضلاع رباعي الوجوه السابق h_0 بدلالة جملة الإحداثيات الطبيعية انطلاقاً من شكلها في جملة الإحداثيات المعمّمة وبالعكس.

***a.* الانتقال من جملة الإحداثيات المعمّمة إلى جملة إحداثيات الحجم:**

تُعطى عناصر قاعدة أضلاع h_0 بدلالة الإحداثيات المعمّمة كما رأينا آنفاً بالعلاقات(3−76) كما وترتبط إحداثيات الحجم بالإحداثيات المعمّمة وفق العلاقات(3−12)، نبدّل (3−12) في(3−76) فنجد أنّ دوال قاعدة الأضلاع تكتب بالشّكل:

$$\begin{matrix} \overrightarrow{w_1^0} = (1-\xi_3-\xi_4, \xi_2, \xi_2) & \overrightarrow{w_4^0} = (-\xi_3, \xi_2, 0) \\ \overrightarrow{w_2^0} = (\xi_3, 1-\xi_2-\xi_4, \xi_3) & \overrightarrow{w_5^0} = (-\xi_4, 0, \xi_2) \\ \overrightarrow{w_3^0} = (\xi_4, \xi_4, 1-\xi_2-\xi_3) & \overrightarrow{w_6^0} = (0, -\xi_4, \xi_3) \end{matrix} \quad (78\text{–}3)..$$

لنوجد الآن إحداثيات الحجم من أجل h_0 السابق:

$$\xi_1 = \frac{V_1}{V} = \frac{1}{6V}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 1-x-y-z \Rightarrow \nabla\xi_1 = (-1,-1,-1)$$

$$\xi_2 = \frac{V_2}{V} = \frac{1}{6V}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 & x_4 \\ y_1 & y & y_3 & y_4 \\ z_1 & z & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = x \qquad \Rightarrow \nabla\xi_2 = (1,0,0)$$

$$\xi_3 = \frac{V_3}{V} = \frac{1}{6V}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x & x_4 \\ y_1 & y_2 & y & y_4 \\ z_1 & z_2 & z & z_4 \end{vmatrix} = y \qquad \Rightarrow \nabla\xi_3 = (0,1,0)$$

$$\xi_4 = \frac{V_4}{V} = \frac{1}{6V}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x \\ y_1 & y_2 & y_3 & y \\ z_1 & z_2 & z_3 & z \end{vmatrix} = z \qquad \Longrightarrow \nabla\xi_4 = (0,0,1)$$

وبالتّالي:

$$(\xi_1\nabla\xi_2 - \xi_2\nabla\xi_1) = (1-\xi_3-\xi_4, \xi_2, \xi_2) \qquad (\xi_2\nabla\xi_3 - \xi_3\nabla\xi_2) = (-\xi_3, \xi_2, 0)$$
$$(\xi_1\nabla\xi_3 - \xi_3\nabla\xi_1) = (\xi_3, 1-\xi_2-\xi_4, \xi_3) \qquad (\xi_2\nabla\xi_4 - \xi_4\nabla\xi_2) = (-\xi_4, 0, \xi_2)$$
$$(\xi_1\nabla\xi_4 - \xi_4\nabla\xi_1) = (\xi_4, \xi_4, 1-\xi_2-\xi_3) \qquad (\xi_3\nabla\xi_4 - \xi_4\nabla\xi_3) = (0, -\xi_4, \xi_3)$$

(79−3)...

بالمقارنة بين (78−3) و(79−3) نلاحظ أنه من أجل العنصر h_0 يُمكن إيجاد دوال قاعدة الأضلاع مباشرة بدلالة إحداثيات الحجم وذلك باستخدام العلاقات:

(80−3)... $\qquad \overrightarrow{w_i^0} = (\xi_i\nabla\xi_j - \xi_j\nabla\xi_i) \qquad i,j = 1,2,\ldots,6$

```
In[15]:=
<< Calculus`VectorAnalysis`
x1 = 0; y1 = 0; z1 = 0; x2 = 1; y2 = 0; z2 = 0; x3 = 0; y3 = 1; z3 = 0; x4 = 0; y4 = 0; z4 = 1;

          ( 1   1   1   1  )
V = Det[  ( x1  x2  x3  x4 ) ];
          ( y1  y2  y3  y4 )
          ( z1  z2  z3  z4 )

           ( 1   1   1   1  )              ( 1   1   1   1  )              ( 1   1   1   1  )
ξ1 = Det[  ( x   x2  x3  x4 ) ] / V; ξ2 = Det[ ( x1  x   x3  x4 ) ] / V; ξ3 = Det[ ( x1  x2  x   x4 ) ] / V;
           ( y   y2  y3  y4 )              ( y1  y   y3  y4 )              ( y1  y2  y   y4 )
           ( z   z2  z3  z4 )              ( z1  z   z3  z4 )              ( z1  z2  z   z4 )

           ( 1   1   1   1 )
ξ4 = Det[  ( x1  x2  x3  x ) ] / V;
           ( y1  y2  y3  y )
           ( z1  z2  z3  z )

∇ξ[i_] := Grad[ξi, Cartesian[x, y, z]];

w = Table[W[[j]] /. {x -> Sum[xi Ni, {i,1,4}], y -> Sum[yi Ni, {i,1,4}], z -> Sum[zi Ni, {i,1,4}]}, {j, 1, 6}]

Out[20]=
{{1 - N3 - N4, N2, N2}, {N3, 1 - N2 - N4, N3}, {N4, N4, 1 - N2 - N3}, {-N3, N2, 0}, {-N4, 0, N2}, {0, -N4, N3}}
```

b. الانتقال من جملة إحداثيات الحجم إلى جملة الإحداثيات المعمّمة:

نبدّل الدوال $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ في العلاقات (79−3) فنجد أن:

$$(\xi_1\nabla\xi_2 - \xi_2\nabla\xi_1) = (1-x-y-z)(1,0,0) - x(-1,-1,-1) = (1-y-z, x, x) = \overrightarrow{w_1^0}$$

وبالمثل:

$$(\xi_1\nabla\xi_3 - \xi_3\nabla\xi_1) = (1-x-y-z)(0,1,0) - y(-1,-1,-1) = (y, 1-x-z, y) = \overrightarrow{w_2^0}$$

نستمر بهذا الشّكل فنجد أنّ: $\qquad (\xi_i\nabla\xi_j - \xi_j\nabla\xi_i) = \overrightarrow{w_k}$

ملاحظة: إنّ دوال قاعدة الأضلاع في العلاقة (3−80) غير منظمة لذا يتم نضرب كل منها بطول الضلع l_{ij} المرتبطة بها، كي تتحول إلى دوال قاعدة منظمة أي أنها تكتب بالشكل:

(80−3)́... $\qquad \overrightarrow{w_i^0} = l_{ij}(\xi_i\nabla\xi_j - \xi_j\nabla\xi_i) \qquad i,j = 1,2,3$

حيث أن $\overrightarrow{w_k}$ دالة القاعدة المرتبطة بالضلع ***k*** ، و l_{ij} طول الضلع ***k*** الواصلة بين العقدتين ***i,j***.

نتيجة(3−2): نلاحظ مما سبق أنه يُمكن إيجاد دوال قاعدة أضلاع رباعي الوجوه ***T₀*** والمولِّدة للفضاء ***P*** باستخدام الدوال(3−80).

٢. تحويل دوال قاعدة أضلاع رباعي الوجوه *h₀* إلى أي رباعي وجوه آخر *h*:

لاحظنا أن إيجاد دوال قاعدة أضلاع رباعي الوجوه ***h₀*** أيضاً لن يكون صعباً بالمقارنة مع عمليّة إيجاد دوال قاعدة أضلاع أي رباعي وجوه آخر لا تنطبق أياً من أضلاعه على المحاور الإحداثية، ولكنّ هذه الصعوبة سرعانما تزول إذا استخدمنا العلاقات التي تربط بين جملتي إحداثيات الحجم والإحداثيات المعمّمة، وذلك يتوضح من خلال كتابة العلاقات (3−5) بالشّكل التّالي:

$$x(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad 1-\xi_1-\xi_2-\xi_3]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$y(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad 1-\xi_1-\xi_2-\xi_3]\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{z}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad 1-\xi_1-\xi_2-\xi_3]\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix}$$

وبالتّالي فإّن مصفوفة تحويل جاكوبي تُعطى بالعلاقة:

$$(81-3)\ldots \qquad [J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_3} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1-x_4) & (y_1-y_4) & (z_1-z_4) \\ (x_2-x_4) & (y_2-y_4) & (z_2-z_4) \\ (x_3-x_4) & (y_3-y_4) & (z_3-z_4) \end{bmatrix}$$

ومنه يُمكن مباشرة إيجاد قاعدة أضلاع أي عنصر مثلثي باستخدام التحويل **[16]:**

$$(82-3)\ldots \qquad \overrightarrow{w_i} = J^{-1}\,\overrightarrow{w_i^0}$$

حيث أنّ $\overrightarrow{w_i^0}$ دوال قاعدة أضلاع رباعي الوجوه ***h₀*** و $\overrightarrow{w_i}$ دوال قاعدة أضلاع رباعي الوجوه الاختياري.

مثال (3−3):

أوجد دوال قاعدة أضلاع رباعي الوجوه الذي رؤوسه النقاط:

(0,0,0),(1,0,0),(0,0,1),(2,2,-2)

```
In[29]:= x1 = 0; x2 = 1; x3 = 0; x4 = 2; y1 = 0; y2 = 0; y3 = 0; y4 = 2; z1 = 0; z2 = 0; z3 = 1; z4 = -2;
jac = Table[{xi - x4, yi - y4, zi - z4}, {i, 3}]
w = Table[Null, {i, 6}];
Do[w[[i]] = Inverse[jac].W[[i]]; Print["W[", i, "]=", w[[i]]], {i, 6}]

Out[30]= {{-2, -2, 2}, {-1, -2, 2}, {-2, -2, 3}}

W[1]={-1 + x + y + z, 1/2 (-1 + y + z), -1 + x + y + z}
W[2]={1 - x - y - z, -1 + x + y/2 + z, 0}
W[3]={0, 1 - x - y - 3z/2, 1 - x - y - z}
W[4]={x + y, -x + y/2, y}
W[5]={z, x + z/2, x + z}
W[6]={-z, y + z, y}
```

ii. عناصر قاعدة أضلاع سداسي الوجوه:

لنفرض أن **Ω** المنطقة المدروسة مجزّأة إلى مجموعة من المجسمات سداسية الوجوه، عندئذٍ من أجل أي سداسي وجوه نعرف عنصراً منتهياً (K, P, A) **[10]** حيث أن:

K : مجسم سداسي الوجوه.

P : فضاء متجهي من الحدوديّات بعده منتهٍ.

A : مجموعة منتهية من الدّاليات الخطيّة المُعرّفة على P تدعى درجات الحريّة.

يُمكن استخدام تحويل ثلاثي الخطيّة B يسمح بالانتقال من أي مجسم سداسي إلى المكعّب ثنائي الواحدة:

$$K_0 = \{-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1\}$$

حيث يُعرّف هذا التحويل بالشكّل: $B(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi, \eta, \zeta)\overrightarrow{x_i}$

علماً أنّ $\overrightarrow{x_i} = (x_i, y_i, z_i)$ إحداثيات عقد المجسم السداسي، أمّا N_i فهي دوال الاستيفاء من أجل مكعّب الواحدة في الفضاء ثلاثي الأبعاد وتُعطى بالعلاقات(3−56).

نقوم الآن بإنشاء العناصر المنتهية مستفيدين من العنصر المرجعي (المكعّب ثنائي الواحدة) إذ نُعرّف العنصر المنتهي عليه ثم ننتقل باستخدام التحويل B إلى المجسم السداسي.

لنفرض أنّ العنصر المنتهي على العنصر المرجعي معرّف بالثلاثية (K_0, P_0, A_0) حيث A_0 مجموعة منتهية من الدّاليات الخطيّة المعرّفة على P_0، نستخدم نموذج نيديليك ***(Nedelec-type)*** لدرجات الحريّة، والذي يعتمد على أنّ:

$$\beta_j(\vec{w}) = \int_{a_i} (\vec{w}.\vec{t_i}) d\alpha \quad , \vec{w} \in P_0 \qquad (83-3) ...$$

حيث:
$$P_0 = \{\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]^t : u_1 \in Q_{0,1,1}, u_2 \in Q_{1,0,1}, u_3 \in Q_{1,1,0}\} \qquad (84-3)...$$

و $Q_{l,m,n}$ الفضاء الشّعاعيّ للحدوديّات بثلاثة متغيرات (ξ, η, ζ) ، من الدرجة l على الأكثر بالنسبة للمتغير ξ ، ومن الدرجة m على الأكثر بالنسبة للمتغير η ، ومن الدرجة $\boldsymbol{n}$ على الأكثر بالنسبة للمتغير ζ ، أمّا $\vec{t_i}$ فهو شعاع واحدة المماس للضلع a_i، كما وتحقق دوال قاعدة الفضاء P_0:

$$\begin{cases} \beta_i(\vec{w}) = 1 \\ \beta_j(\vec{w}) = 0 \quad j \neq i, \quad i, j = 1,2, \dots, 12 \end{cases} \qquad (85-3) ...$$

نلاحظ أن بعد P_0 هو **12** وهو مساوٍ لعدد رؤوس المكعب.

نجد من $(84-3)$ أنّه أياً كانت $\vec{w} \in P_0$ لها الشّكل:

$$\vec{w} = (d_1 + a_1 \eta + b_1 \zeta + c_1 \eta\zeta, d_2 + a_2 \xi + b_2 \zeta + c_2 \xi\zeta, d_3 + a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \xi\eta)$$

والآن لإيجاد دالة القاعدة من أجل الضلع $\boldsymbol{i}$ نبدل عبارة $\vec{w}$ في $(83-3)$ ثم نُوجد حلّ جملة المعادلات الناتجة، فمثلاً من أجل الضلع **(1)** نأخذ $i = 1$ في $(83-3)$ و $\vec{t_1} = (1,0,0)$، علماً أن $\eta = \zeta = -1$ عند الضلع **(1)**، عندئذٍ نحصل على جملة المعادلات الخطيّة:

$$\begin{aligned}
-2(a_1 + b_1 - c_1 - d_1) &= 1 \\
2(a_1 - b_1 - c_1 + d_1) &= 0 \\
-2(a_1 - b_1 + c_1 - d_1) &= 0 \\
2(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) &= 0 \\
-2(a_2 + b_2 - c_2 - d_2) &= 0 \\
-2(a_2 - b_2 + c_2 - d_2) &= 0 \\
2(a_2 - b_2 - c_2 + d_2) &= 0 \\
2(a_2 + b_2 + c_2 + d_2) &= 0 \\
-2(a_3 + b_3 - c_3 - d_3) &= 0 \\
2(a_3 - b_3 - c_3 + d_3) &= 0 \\
-2(a_3 - b_3 + c_3 - d_3) &= 0 \\
2(a_3 + b_3 + c_3 + d_3) &= 0
\end{aligned}$$

نُوجد حلّ جملة المعادلات السّابقة فنجد أنّ دالة القاعدة الموافقة للضلع الأولى هي:

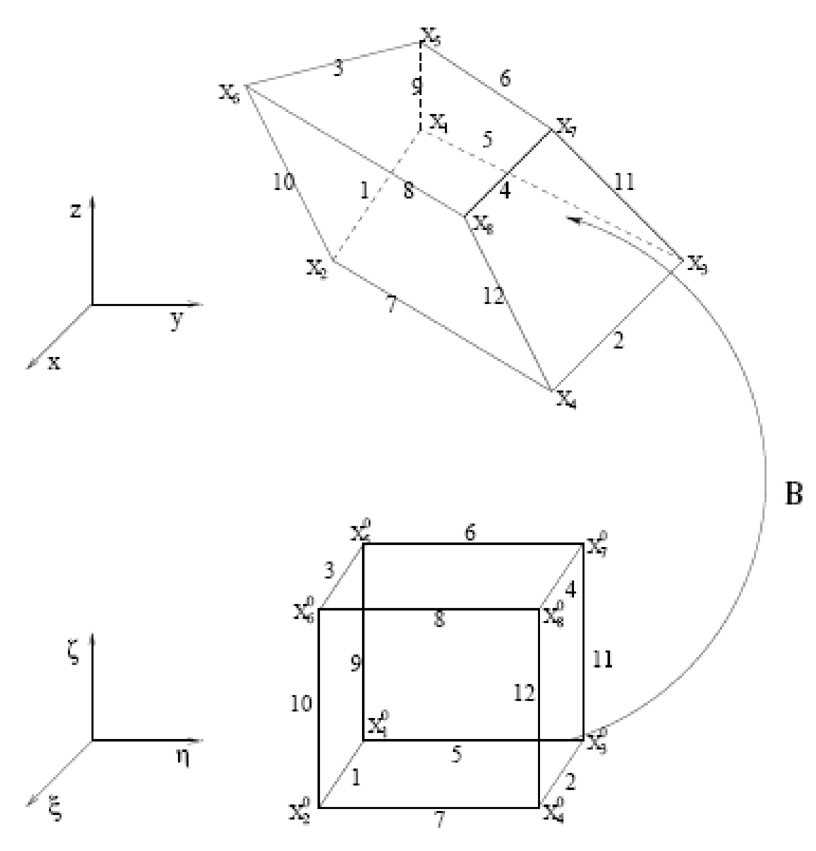
$$\overrightarrow{W_1^0} = \frac{1}{8}((\eta - 1)(\zeta - 1), 0,0)^T$$

وهكذا يُمكن وبطريقة مشابهة إيجاد دوال القاعدة من أجل جميع أضلاع مكعب ثنائي الواحدة:

$$\overrightarrow{W_1^0} = \frac{1}{8}((1-\eta)(1-\zeta),0,0)^T \qquad \overrightarrow{W_7^0} = \frac{1}{8}(0,(1+\xi)(1-\zeta),0)^T$$
$$\overrightarrow{W_2^0} = \frac{1}{8}((1+\eta)(1-\zeta),0,0)^T \qquad \overrightarrow{W_8^0} = \frac{1}{8}(0,(1+\xi)(1+\zeta),0)^T$$
$$\overrightarrow{W_3^0} = \frac{1}{8}((1-\eta)(1+\zeta),0,0)^T \qquad \overrightarrow{W_9^0} = \frac{1}{8}(0,0,(1-\xi)(1-\eta))^T$$
$$(86\text{–}3)\ldots \quad \overrightarrow{W_4^0} = \frac{1}{8}((1+\eta)(1+\zeta),0,0)^T \qquad \overrightarrow{W_{10}^0} = \frac{1}{8}(0,0,(1+\xi)(1-\eta))^T$$
$$\overrightarrow{W_5^0} = \frac{1}{8}(0,(1-\xi)(1-\zeta),0)^T \qquad \overrightarrow{W_{11}^0} = \frac{1}{8}(0,0,(1-\xi)(1+\eta))^T$$
$$\overrightarrow{W_6^0} = \frac{1}{8}(0,(1-\xi)(1+\zeta),0)^T \qquad \overrightarrow{W_{12}^0} = \frac{1}{8}(0,0,(1+\xi)(1+\eta))^T$$

لكن يجب وكما ذكرنا سابقاً أن تُردّ دوال القاعدة هذه والمعرفة من أجل العنصر المرجعي المكعب إلى دوال قاعدة مُعرّفة من أجل أيّ المجسم السداسي، وهذا يتمّ وفق التحويل التّالي:

$$(88\text{–}3)\ldots \qquad \overrightarrow{w_j} = J^{-1}\overrightarrow{W_j^0}$$



الشّكل (3–30) (التحويل بين المكعّب ثنائي الواحدة و العنصر سداسي

حيث أن J هي مصفوفة جاكوبي للتحويل B والتي يُمكن استنتاجها كما يلي:

لدينا:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_8 \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_8 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_8 \end{Bmatrix}$$

ومنه يكون:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{8,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \dots & N_{8,\eta} \\ N_{1,\zeta} & N_{2,\zeta} & \dots & N_{8,\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} \quad \dots(89\text{-}3)$$

خواص الدوال $\overrightarrow{W_j^0}$:

- $\nabla . \overrightarrow{W_j^0} = 0$ **و** $\nabla \times \overrightarrow{W_j^0} = c \neq 0$**.**
- يُمكن التعبير عن الحقل الكهربائي داخل العنصر بالعلاقة: $\overrightarrow{E^e} = \sum_{i=1}^{12} E_i^e \overrightarrow{W_i^e}$ حيث تُشير E_i^e إلى القيمة المتوسطة للحقل المماس على طول الضلع i، و $\overrightarrow{W_i^e}$ هي دالة القاعدة المرتبطة بالضلع $\boldsymbol{i}$ من العنصر $\boldsymbol{e}$.
- تضمن دالة القاعدة $\overrightarrow{W_i^e}$ الاستمرار المماسي للحقل على سطوح العناصر.

الفصل الرّابع

حلّ معادلات ماكسويل

بطريقة العناصر المنتهية في (1-D)

4−1. مقدّمة:

تعرّفنا في الفصل السابق على أنواع متعددة من العناصر، كما عرضنا دوال الشّكل المرتبطة بكلّ عنصر، وأوضحنا كيفية الانتقال بين الجمل الإحداثية المختلفة، ننتقل الآن إلى هذا الفصل الذي نعرض من خلاله خطوات حلّ معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية في **(1-D)**.

لكن علينا في البداية ألا ننسى أنّه يُمكننا استبدال معادلات ماكسويل بمعادلتين تفاضليتين تدعى كل منهما بمعادلة الموجة(3−1−6) والتي تأخذ في**(1-D)** الشّكل التّالي:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dU}{dx}\right)+q(x)U(x)=f(x) \qquad x_1<x<x_n \qquad (1-4)...$$

حيث أنّ $p(x),q(x),f(x)$ دوال معرّفة على المنطقة المدروسة.

أمّا الدّالة $U(x)$ فهي تمثل الحقل الكهربائي أو المغناطيسي أو قد تكون مقداراً كمونياً، ووفقاً لتحديد هذه الدّالة تتحدد المسألة المدروسة **[15]**، إذ يُمكن أن نصادف حالات عديدة منها :

a. مكثف الصفائح المتوازية (*parallel plate capacitor*):

المتحول: $U(x)=V(x)$ هو الكمون بين الصفائح.

الشّروط الحديّة: $V(0)=0,\quad V(x_a)=V_a$.

$p(x)=-1,\ q(x)=0,\ f(x)=\frac{-\rho}{\varepsilon}$

المعادلة التّفاضليّة: $\nabla^2V=\frac{-\rho}{\varepsilon} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^2}{dx^2}V(x)=\frac{-\rho}{\varepsilon}$ (2−4)...

الشّكل(4−1) مسألة مكثف لا نهائي

b. الموجة بين الصفائح المتوازية (*wave between parallel plates*):

المتحول: $U(x) = E_y(x)$ هو الحقل الكهربائي بين الصفائح.

الشّروط الحديّة: $E_y(0) = E_y(x_a) = 0$.

$p(x) = {}^{-1}/_{\mu_r}\,,\; q(x) = k_0^2\varepsilon_r,\; f(x) = source\ function$.

المعادلة التّفاضليّة: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{d}{dx}E_y\right) + k_0^2\varepsilon_r E_y = f(x)$ ...(3-4)

الشّكل(2-4) مسألة الصفائح المتوازية

c. الانعكاس عن سطح ناقل معدني مطلي (*reflection from a coated metallic conductor*):

يكون المتحول في هذه الحالة هو:

$$U(x) = \begin{cases} E_z(x): & \text{الاستقطاب العمودي} \\ or & \\ H_z(x): & \text{الاستقطاب الموازي} \end{cases}$$

الشّروط الحديّة: $E_z(x=0) = 0,\; \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + ik_0E_z\right)\Big|_{x=x_a} = 2ik_0e^{ik_0x_a}$.

أو $\frac{\partial H_z}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,\; \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} + ik_0H_z\right)\Big|_{x=x_a} = 2ik_0e^{ix_a}$

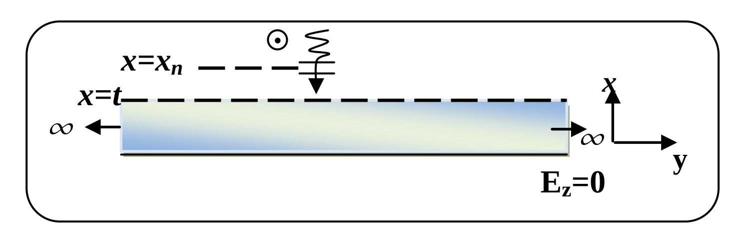
و المعادلة التّفاضليّة:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+k_0^2\varepsilon_r E_z=0 \quad or \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)+k_0^2\mu_r H_z=0 \qquad ...(4-4)$$

إذ ينتج الشرط الحدي عند $x = x_a$ من حقيقة كون الحقل المنعكس له الشّكل:

$$\begin{Bmatrix} E_z^r \\ H_z^r \end{Bmatrix} = Re^{-ik_0x} \qquad ...(5-4)$$

حيث أن **R** معامل انعكاس مستوي الأرض المطلي و لا يُمكن تحديده إلا بعد أن ننتهي من الحلّ بطريقة العناصر المنتهية.



الشّكل(4-3) الانعكاس عن سطح ناقل معدني

وهكذا فإنّ الحقل الكلي:

$$H_z = H_z^{inc} + H_z^r \quad و \quad E_z = E_z^{inc} + E_z^r \qquad (6-4)...$$

يحقق الشّروط الحديّة المذكورة، حيث تمثّل H_z^{inc}, E_z^{inc} المركبة على المحور OZ للموجة المستوية نتيجة انعكاسها عن سطح المعدن المطلي بعازل.

نجد الآن أنفسنا بصدد حلّ معادلة تفاضليّة جزئية من المرتبة الثانية (المعادلة(4-1))، ولا شكّ أنّ إيجاد حلول لمثل هذه المعادلات ليس بالأمر اليسير، لذا فنحن بحاجة إلى طريقة تمكننا من تخفيض رتبة المشتقات في المعادلة التّفاضليّة قبل حلّها، إنّ هذه الطريقة هي ما يعرف اليوم باسم طريقة الباقي الموزون، لكن ما آلية عمل هذه الطّريقة؟ وكيف سنستفيد منها في دراستنا لطريقة العناصر المنتهية؟، هذا ما سنوضحه في الفقرة التالية.

4-2. طريقة الباقي الموزون *(weighted residual method)*:

لنفرض أنّ:

$$\tilde{U}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i U_i \qquad (7-4)...$$

هو حلّ تقريبي للمعادلة التّفاضليّة(4-1)، عندئذٍ لو بدلنا هذا الحلّ في المعادلة المذكورة نتج لدينا حد الخطأ المعروف بالباقي ***(residual)*** والذي يُمكن أنْ يُعبَّر عنه بالعلاقة:

$$R(x) = \frac{-d}{dx}\left(p(x)\frac{d\tilde{U}}{dx}\right) + q(x)\tilde{U}(x) - f(x) \qquad (8-4)...$$

ولا شكَّ أن التقريب الأمثل لهذه المسألة يجب أن يجعل $R(x) = 0$، لكن لن يكون بإمكانّنا من الناحية العمليّة أن نفرض أن $R(x) = 0$ عند كل نقطة من نقاط المنطقة المدروسة لذا افترضت طريقة الباقي الموزون تجزئة المنطقة إلى عناصر صغيرة يكون فيها:

$$\int_{\Omega} W_m(x)R(x)dx = 0 \qquad m=1,2,\ldots,N_e \qquad (9-4)...$$

حيث أنّ:

Ω : هي المنطقة المدروسة.

N_e: عدد عناصر المنطقة المدروسة.

$W_m(x)$: دوال الوزن.

هذا وتأخذ طريقة الباقي الموزون أسماءً عديدةً تبعاً لطريقة اختيار دوال الوزن، فإن كانت دوال الوزن مساوية لدوال القاعدة المستخدمة في تمثيل الحلّ التقريبي(4−7) دُعيت هذه الطّريقة حينها بطريقة كالاركين (***Galerkin's method***)، وتعتبر هذه الطّريقة هي الأكثر شيوعاً في مجال الانتقال من حلّ المعادلات التّفاضليّة إلى حلّ جملة من المعادلات الخطيّة، ونرى هذه الطّريقة بكثرة عند استخدام طريقة العناصر المنتهية كطريقة في تقريب حلّول المعادلات التّفاضليّة الجزئية، ويُعزى ذلك إلى أن استخدام طريقة كالاركين في هذه الحالة يُعطينا جملة من المعادلات الخطيّة تكون مصفوفة الأمثال فيها شريطية (ثلاثية الأقطار في **(1-D)**) ومتناظرة، الأمر الذي يُعطينا سهولةً كافية في برمجة هذه الطّريقة على الحاسوب. لذا نُنوّه إلى أنّنا سوف نعمد إلى استخدام هذه الطّريقة خلال دراستنا المقبلة.

بما أنّنا افترضنا أن العلاقة(4−9) محققة من أجل المنطقة Ω فإن هذا يقتضي تحققها من أجل أي عنصر (منطقة جزئية) Ω^e من Ω، ومنه استناداً على طريقة كالاركين التي تكون فيها:

$$W_m(x) = N_m(x)$$

نجد أنّه يُمكن كتابة العلاقة(4−9) بالشّكل:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega^e} N^{(e)} \left[-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\widetilde{U}^{(e)}(x)}{dx}\right) + q(x)\widetilde{U}^{(e)}(x) - f(x)\right] d\Omega = 0 \quad \text{(10−4)}\ldots$$

حيث أن N_e[1] هو عدد العناصر المستخدمة في التجزئة، أمّا $\widetilde{U}^{(e)}(x)$ فهي القيمة التّقريبية للدّالة ***U(x)*** على العنصر ***e*** أي:

$$\widetilde{U}^{(e)}(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i^{(e)} U_i^{(e)} \quad \text{(11−4)}$$

أو بشكلٍ آخر:

$$\widetilde{U}^{(e)}(x) = (\overrightarrow{N^{(e)}})^T \overrightarrow{U^{(e)}}$$

(12−4)

حيث أنّ:

$$(\overrightarrow{N^{(e)}})^T = \{N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, N_3^{(e)}, \ldots, N_n^{(e)}\}$$

و

$$(\overrightarrow{U^{(e)}})^T = \{U_1^{(e)}, U_2^{(e)}, U_3^{(e)}, \ldots, U_n^{(e)}\}$$

إذ تشير $\boldsymbol{n}$ إلى عدد عقد العنصر ***e*** .

و $N_i^{(e)}$ إلى دوال قاعدة عقد العنصر ***e*** .

أمّا $U_i^{(e)}$ فهي قيمة الدّالة $\boldsymbol{U}$ عند عقد العنصر ***e*** .

ذكرنا آنفاً أنّ استخدام طريقة كاليركين في تحليل العناصر المنتهية ينقلنا من حلّ معادلةٍ تفاضليّةٍ إلى حلّ جملةٍ خطيّةٍ من المعادلات الجبرية لكن كيف يتمّ ذلك وما فائدة دالة الوزن هنا؟!.

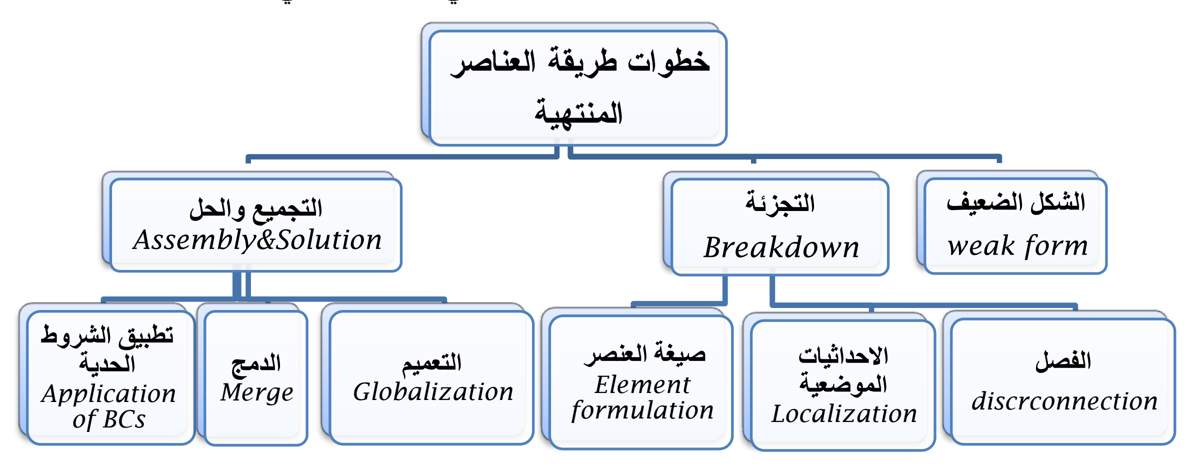
---

[1] N_e تشير إلى عدد عقد المنطقة، بينما نستخدم الترميز $N^{(e)}$ من أجل دوال الشّكل المرتبطة بالعنصر ***e*** .

يتَّضح هذا الأمر من خلال الخطوات التّالية التي يُمكن تلخيصها كخطواتٍ أساسيّة في إيجاد حلولٍ المعادلات التّفاضليّة بطريقة العناصر المنتهية، والتي سيتمّ تطبيقها في هذا الفصل على المسائل في حالة **.(1-D)**

4-3. الخطوات الأساسيّة لطريقة العناصر المنتهية:

يُمكن تلخيص الخطوات الأساسيّة لطريقة العناصر المنتهية في المخطط التّالي:



المخطط (4-1) الخطوات الأساسيّة في طريقة العناصر المنتهية

4-3-1. إيجاد الشّكل الضّعيف(المتحولي) (*weak or variational form*) للمعادلة التّفاضليّة:

يُعتبر الشّكل الضّعيف(المتحولي) للمعادلة التّفاضليّة ذو أهميّة كبيرة في الحلول العددية للمعادلات التّفاضليّة ونحصل عليه بإتباع خطوتين أساسيتين:

<u>الخطوة الأولى:</u>

نكامل الحد الأول من العلاقة (4-10) بالتجزئة وذلك بغية خفض مرتبة المشتقات الموجودة في عبارة $R(x)$، وهنا تكمن الفائدة الرئيسية من استخدام دوال الوزن.

$$-\int_{x_1^e}^{x_2^e} N^{(e)}(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\tilde{U}^{(e)}(x)}{dx}\right)dx = -\left[p(x)N^{(e)}(x)\frac{d\tilde{U}^{(e)}(x)}{dx}\right]_{x=x_1^e}^{x=x_2^e} + \int_{x_1^e}^{x_2^e} p(x)\frac{dN^{(e)}(x)}{dx}\frac{d\tilde{U}^{(e)}(x)}{dx}dx \quad (13-4)...$$

<u>الخطوة الثانية:</u>

نبدّل العلاقة (4-13) في العلاقة (4-10) فنحصل على المعادلة التّالية:

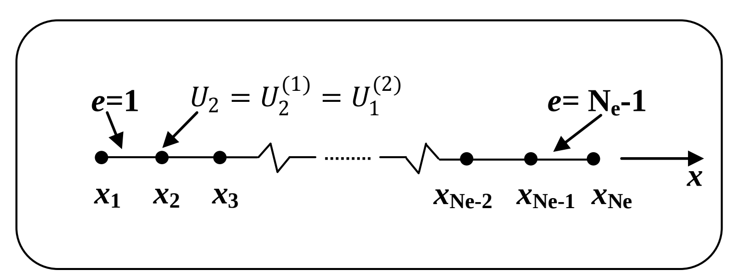
$$\sum_{e=1}^{N_e}\{\int_{x_1^e}^{x_2^e}[p(x)\frac{dN^{(e)}(x)}{dx}\frac{d\widetilde{U}^{(e)}(x)}{dx}+q(x)N^{(e)}(x)\widetilde{U}^{(e)}(x)-N^{(e)}(x)f(x)]dx+ -\left[p(x)N^{(e)}(x)\frac{d\widetilde{U}^{(e)}(x)}{dx}\right]_{x=x_1^e}^{x=x_2^e}\}=0 \quad (14-4)...$$

تُعرف هذه العلاقة باسم الشّكل الضّعيف للمسألة، وتتحدد الشّروط الحديّة المفروضة على ***U(x)*** و$\frac{dU(x)}{dx}$ في المعادلة(14−4) حسب المسألة المدروسة، من هنا نجد أنّ هذه المعادلة ليست مجرد شكل آخر للمعادلة التّفاضليّة الجزئية(4−1) بل إنّها تتضمّن أيضاً معلومات عن الشّروط الحديّة الضّرورية في وحدانية حلّ المسألة المطلوبة.

4−3−2. التجزئة:

4−3−2−1. الفصل:

لابدّ وقبل بداية الحلّ بطريقة العناصر المنتهية من تجزئة المنطقة المدروسة إلى مجموعة من العناصر المنتهية، ففي حالتنا هذه قمنا بتجزئة المنطقة المدروسة إلى **N_e-1** عنصراً صغيراً كما هو موضّح الشّكل(4−4).



الشّكل(4−4) تجزئة المجال إلى مجموعة من العناصر

4−3−2−2. الإحداثيات الموضعيّة:

ننسب كل عنصر ***e*** إلى جملة من الإحداثيات الخاصة به ندعوها جملة الإحداثيات الموضعيّة.

ويكون لكل عقدة رقم وحيد خاص بها ضمن العنصر الواحد، فمثلاً من أجل أي قطعة مستقيمة تأخذ العقدتين المحددتين لها الأرقام **(1,2)**، ويرمز بالتّالي إلى موضع النقطة الموضعيّة رقم**(1)** في العنصر ***e*** بالرمز $x_1^{(e)}$، ويشار إلى قيمة الحقل الكهربائي أو الكمون الكهربائي عند العقدة ذاتها بالرمز $U_1^{(e)}$، وبالمثل يرمز إلى موضع النقطة الموضعيّة رقم**(2)** في العنصر ***e*** بالرمز $x_2^{(e)}$ بينما يشار إلى قيمة الحقل الكهربائي أو الكمون الكهربائي عند العقدة ذاتها بالرمز $U_2^{(e)}$، يفيد هذا النوع من الترميز بشكل أساسي في إيجاد العلاقات المرتبطة بكل عنصر.

4−3−2−3. صيغة العنصر:

نُوجد في هذه المرحلة مصفوفة كل عنصر اعتماداً على جملة الإحداثيات الموضعيّة المنسوب إليها ويتمّ ذلك وفق الآتي:

نختار من أجل كل عنصر ***e*** تمثيلاً خطيّاً للمتغير $U^{(e)}$ مُعرّفاً وفق العلاقة:

$$\widetilde{U}^{(e)} = N_1^{(e)} U_1^{(e)} + N_2^{(e)} U_2^{(e)} \qquad (15\text{–}4)...$$

حيث أنّ $U_1^{(e)}$ و $U_2^{(e)}$ هما قيمتا متغير الحقل المجهولتين عند عقدتي العنصر رقم ***e***.

أو بشكل آخر:

$$\widetilde{U}^{(e)} = (\overrightarrow{N^{(e)}})^T \overrightarrow{U^{(e)}} \qquad (16\text{–}4)...$$

حيث أنّ:

$$(\overrightarrow{U^{(e)}})^T = \{U_1^{(e)} \quad U_2^{(e)}\}$$
$$(\overrightarrow{N^{(e)}})^T = \{N_1^{(e)} \quad N_2^{(e)}\} \qquad (17\text{–}4)...$$

مع العلم بأنّ $N_i^{(e)}$ هي دوال الاستيفاء المعرفة كما يلي:

$$N_1^{(e)}(x) = \begin{cases} \frac{x_2^e - x}{x_2^e - x_1^e} & x_1^e < x < x_2^e \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$
$$N_2^{(e)}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1^e}{x_2^e - x_1^e} & x_1^e < x < x_2^e \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases} \qquad (18\text{–}4)...$$

نبدّل(4–16) في الشّكل الضّعيف للمعادلة التّفاضليّة(4–14) لنجد أنّه يصبح بالشّكل:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \int_{x_1^e}^{x_2^e} [p(x) \frac{d\overrightarrow{N^{(e)}(x)}}{dx} \frac{d\overrightarrow{N^{(e)}}^T(x)}{dx} + q(x) \overrightarrow{N^{(e)}}(x) \overrightarrow{N^{(e)}}^T(x)] dx \right\} \overrightarrow{U^{(e)}} =$$
$$\sum_{e=1}^{N_e} \{ \int_{x_1^e}^{x_2^e} \overrightarrow{N^{(e)}}(x) f(x) dx + \left[p(x) \overrightarrow{N^{(e)}}(x) \frac{d\widetilde{U}^{(e)}(x)}{dx} \right]_{x=x_1^e}^{x=x_2^e} \} \qquad (19\text{–}4)...$$

وبما أنّ $N_j^{(e)}(x)$ يساوي الصفر عند جميع العناصر عدا العنصر ***e*** فإن هذا يسمح لنا بحذف المجموع على جميع العناصر وبالتّالي كتابة العلاقة (4–19) بالشّكل المصفوفي التّالي:

$$A^{(e)} \overrightarrow{U^{(e)}} = \overrightarrow{F^{(e)}} + \overrightarrow{EndPoints^{(e)}} \qquad e = 1,2,\dots,N_e \qquad (20\text{–}4)...$$

حيث أنّ:

$$A^{(\mathrm{e})} = K^{(\mathrm{e})} + K_\Delta^{(\mathrm{e})}$$

و

$$K^{(\mathrm{e})} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} q(x) \overrightarrow{N^{(e)}}(x) \overrightarrow{N^{(e)}}^T(x) dx \qquad (21\text{–}4)...$$

$$K_\Delta^{(\mathrm{e})} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} p(x) \frac{d\overrightarrow{N^{(e)}}(x)}{dx} \frac{d\overrightarrow{N^{(e)}}^T(x)}{dx} dx \qquad (22\text{–}4)...$$

$$\overrightarrow{\mathrm{F}^{(\mathrm{e})}} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \overrightarrow{N^{(e)}}(x) f(x) dx \qquad (23\text{–}4)...$$

$$\overrightarrow{EndPoints^{(e)}} = \left[p(x) \overrightarrow{N^{(e)}}(x) \frac{d\widetilde{U}^{(e)}(x)}{dx} \right]_{x=x_1^e}^{x=x_2^e} \qquad (24\text{–}4)...$$

ندعو عادةً جملة المعادلات (4−20) بالجملة المصفوفيّة للعنصر e، في حين تُدعى المصفوفة $A^{(e)}$ بمصفوفة العنصر e .

ملاحظة(4−1):

لم نستبدل نشر $\widetilde{U}^{(e)}$ المعطى بالعلاقة (4−16) في الحد(4−24)، وذلك لأنّ هذا الحد ينتج (كما سنرى من خلال إجرائية التجميع) من تأثير العقدتين الطرفيتين فقط، أي أنّنا لن نحتاج إليه إلا عند إيجاد مصفوفتي العنصرين الأول والأخير، أمّا قيمته فتتحدّد تبعاً للشروط الحديّة المفروضة على المسألة، وتنعدم في حالة خاصة عندما تخضع المسألة لشروط نيومان الحديّة.

ملاحظة(4−2):

نلاحظ من العلاقة(4−22) أنّ هناك شرطاً لا بد من أن تحقّقه دوال القاعدة المستخدمة في طريقة العناصر المنتهية ألا وهو أن تكون هذه الدوال ومشتقاتها الجزئية حتى المرتبة **(*m*-1)** (حيث أن ***m*** هي أعلى مرتبة اشتقاق تظهر في المعادلة التّفاضليّة) قابلة للمكاملة تربيعيّاً على المنطقة المدروسة أي $\mathbf{N_i \in H^1(\Omega)}$.

حالة خاصّة:

بما أنّنا قمنا بتجزئة المنطقة المدروسة إلى عناصر صغيرة فإنّه من الممكن أن نفرض أنّ $p(x) \approx p^e$ و $q(x) \approx q^e$ وذلك أياً كان $x_1^e < x < x_2^e$، نبدّل في عناصر المصفوفة فنجد أنّ:

$$K^{(e)} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} q(x)\overrightarrow{N^{(e)}}(x)\overrightarrow{N^{(e)}}^T(x)dx = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{bmatrix} \left(N_1^{(e)}\right)^2 & N_1^{(e)}N_2^{(e)} \\ N_1^{(e)}N_2^{(e)} & \left(N_2^{(e)}\right)^2 \end{bmatrix} dx$$

$$K^{(e)} = \frac{q^e|x_2^e - x_1^e|}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(25−4)...}$$

وبالمثل نجد أنّ:

$$K_\Delta^{(e)} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} p(x)\frac{d\overrightarrow{N^{(e)}}(x)}{dx}\frac{d\overrightarrow{N^{(e)}}^T(x)}{dx}dx = p^e \int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \left(\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x}\right)^2 \end{bmatrix} dx$$

$$K_\Delta^{(e)} = \frac{p^e}{|x_2^e - x_1^e|}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(26−4)...}$$

كذلك إذا فرضنا أن $f(x) \approx f^e$ عند العنصر e فأنّنا نجد أن:

$$(27-4)\ldots \quad \overrightarrow{F^{(e)}} = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \overrightarrow{N^{(e)}}(x) f(x) dx = f^e \int_{x_1^e}^{x_2^e} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \end{Bmatrix} dx = \frac{f^e |x_2^e - x_1^e|}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

وأخيراً:

$$\overrightarrow{EndPoints^{(e)}} = \left[p(x) \overrightarrow{N^{(e)}}(x) \frac{d\tilde{U}^{(e)}(x)}{dx} \right]_{x=x_1^e}^{x=x_2^e}$$

$$= p^e \left[\begin{Bmatrix} N_1^{(e)}(x_2^e) \\ N_2^{(e)}(x_2^e) \end{Bmatrix} \frac{d\tilde{U}^{(e)}(x_2^e)}{dx} - \begin{Bmatrix} N_1^{(e)}(x_1^e) \\ N_2^{(e)}(x_1^e) \end{Bmatrix} \frac{d\tilde{U}^{(e)}(x_1^e)}{dx} \right]$$

$$= p^e \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{d\tilde{U}^{(e)}(x_2^e)}{dx} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{d\tilde{U}^{(e)}(x_1^e)}{dx} \right]$$

ومنه:

$$(28-4)\ldots \quad \overrightarrow{EndPoints^{(e)}} = p^e \begin{Bmatrix} -\frac{d\tilde{U}^{(e)}(x_1^e)}{dx} \\ \frac{d\tilde{U}^{(e)}(x_2^e)}{dx} \end{Bmatrix}$$

بالعودة إلى المعادلة(4−20) نجد أنّها تُعطينا من أجل $e = 1,2,\ldots,N_e$ جملةً مؤلفةً من $2N_e$ معادلة تحوي $N_e + 1$ مجهولاً، فيا تُرى ما هو السّبب في هذا العدد الكبير من المعادلات وكيف يُمكننا اختزاله؟؟

باختصار يُمكن القول للإجابة عن هذا السؤال إنّ هذا العدد الكبير من المعادلات أتى نتيجةً لدراسة العقدة n نفسها مرتين(مرة على أنّها العقدة الثانية في العنصر e، وأخرى على أنّها العقدة الأولى في العنصر **e+1**)، أي مرّة باستخدام دالة الوزن $N_2^{(e)}(x)$ من الجهة اليسرى، والأخرى باستخدام دالة الوزن $N_1^{(e+1)}(x)$ من الجهة اليمنى، أمّا كيف يُمكننا اختزال عدد هذه المعادلات فهذا ما سنوضحه من خلال إجرائية تجميع معادلات العناصر الموضحة أدناه.

4−3−3. التجميع والحلّ:

يتمّ هنا كتابة المصفوفات العنصرية بدلالة جملة الإحداثيات المعمّمة، يلي ذلك عمليّة تجميع لهذه المعادلات ضمن جملة مصفوفية واحدة تدعى بالمصفوفة المعمّمة نحصل بحلّها على الحلّ التقريبي للمعادلة التّفاضليّة الجزئية، ويأتي توضيح ذلك في الخطوات التّالية:

4−3−3−1. التعميم:

لابدّ لكتابة معادلات العناصر بدلالة جملة الإحداثيات المعمّمة من توضيح ما ندعوه بالأرقام المعمّمة للعقد ولمتغير المسألة المدروسة، وإجراء نوع من المقابلة بينهما:

نرفق كل عقدة من عقد المنطقة المجزّأة برقم وحيد من **1** حتى **N_e** كما يوضّح الشّكل(4−4)، وتُعتبر هذه الأرقام المعمّمة ذات أهميّة كبيرة، وذلك لأنّه ينبغي علينا في النّهاية تجميع معادلات جميع العناصر في جملة مصفوفية واحدة، وبما أنّ كل عقدة (عدا النقاط الحديّة) سوف تنتمي لعنصرين مختلفين، فإنّ ذلك يُعطيها ترقيماً موضعياً مضاعفاً وترميزين موضعيين مختلفين لمتغير الحقل عندها، فمثلاً في

الشّكل(4−4) يتحدّد موضع العقدة المعمّمة x_e موضعياً بالترميزين $x_1^{(e)}, x_2^{(e-1)}$ كما أنّ متغير الحقل يحقق: $U_e = U_1^{(e)} = U_2^{(e-1)}$ ومثل ذلك من أجل جميع العقد الدّاخليّة (غير الطرفية).

يُمكننا حسب العلاقة(4−20) كتابة الجملة المصفوفية للعنصر الأول بالشّكل:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} EndPoints_1^{(1)} \\ EndPoints_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

وبِناءً على ما ذكرنا من ملاحظات متعلّقة بالإحداثيا ت الموضعيّة والمعمّمة يُمكننا أن نكتب مصفوفة العنصر الأول بالشّكل التّالي:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N_e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} EndPoints_1^{(1)} \\ EndPoints_2^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29-4)\dots$$

ندعو هذه الجملة بالجملة المصفوفيّة الموسّعة للعنصر الأول، وبالمثل تُكتب الجملة المصفوفية الموسعة للعنصر الثاني بالشّكل:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & \dots & 0 \\ 0 & A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N_e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ EndPoints_1^{(2)} \\ EndPoints_2^{(2)} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30-4)\dots$$

وهكذا من أجل جميع العناصر حتى العنصر الأخير الذي تأخذ مصفوفته الشّكل:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{11}^{(N_e-1)} & A_{12}^{(N_e-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & A_{21}^{(N_e-1)} & A_{22}^{(N_e-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N_e-1} \\ U_{N_e} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_1^{(N_e-1)} \\ f_2^{(N_e-1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ EndPoints_1^{(N_e-1)} \\ EndPoints_2^{(N_e-1)} \end{Bmatrix}$$

$(31-4)\dots$

4−3−3−2. تجميع معادلات العناصر (*Assemply of the element equations*):

ونعني بإجرائية التجميع دمج معادلات جميع العناصر ضمن جملة مصفوفية واحدة لها شكل الجملة(4−19)، وكما نلاحظ لم يبقَ علينا لإنجاز ذلك سوى جمع الجمل المصفوفيّة الموسعة لجميع العناصر التي تمّ الحصول عليها في الخطوة السّابقة، فنحصل بعمليّة الجمع هذه على جملة المعادلات:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)}+A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)}+A_{11}^{(3)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{22}^{(N_e-3)}+A_{11}^{(N_e-2)} & A_{12}^{(N_e-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{21}^{(N_e-2)} & A_{22}^{(N_e-2)}+A_{11}^{(N_e-1)} & A_{12}^{(N_e-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^{(N_e-1)} & A_{22}^{(N_e-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N_e-2} \\ U_{N_e-1} \\ U_{N_e} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)}+f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)}+f_1^{(3)} \\ \vdots \\ f_2^{(N-3)}+f_1^{(N_e-2)} \\ f_2^{(N_e-2)}+f_1^{(N_e-1)} \\ f_2^{(N_e-1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -p(x_1^1)\frac{d\tilde{U}^{(1)}(x_1^1)}{dx} \\ p(x_2^1)\frac{d\tilde{U}^{(1)}(x_2^1)}{dx} - p(x_1^2)\frac{d\tilde{U}^{(2)}(x_1^2)}{dx} \\ p(x_2^2)\frac{d\tilde{U}^{(2)}(x_2^2)}{dx} - p(x_1^2)\frac{d\tilde{U}^{(3)}(x_1^3)}{dx} \\ \vdots \\ p(x_2^{N_e-3})\frac{d\tilde{U}^{(N_e-3)}\left(x_2^{N_e-3}\right)}{dx} - p(x_1^{N_e-2})\frac{d\tilde{U}^{(N_e-2)}\left(x_1^{N_e-2}\right)}{dx} \\ p(x_2^{N_e-2})\frac{d\tilde{U}^{(N_e-2)}\left(x_2^{N_e-2}\right)}{dx} - p(x_1^{N_e-1})\frac{d\tilde{U}^{(N_e-1)}\left(x_1^{N_e-1}\right)}{dx} \\ p(x_2^{N_e-1})\frac{d\tilde{U}^{(N_e-1)}\left(x_2^{N_e-1}\right)}{dx} \end{Bmatrix}$$

لكن: $p(x_{i+1}^i)\frac{d\tilde{U}^{(i)}\left(x_{i+1}^i\right)}{dx} = p(x_i^{i+1})\frac{d\tilde{U}^{(i+1)}\left(x_i^{i+1}\right)}{dx} = p(x_{i+1})\frac{dU(x_{i+1})}{dx}$

وبالتّالي تُصبح الجملة السّابقة بالشّكل:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)}+A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)}+A_{11}^{(3)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{22}^{(N_e-3)}+A_{11}^{(N_e-2)} & A_{12}^{(N_e-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{21}^{(N_e-2)} & A_{22}^{(N_e-2)}+A_{11}^{(N_e-1)} & A_{12}^{(N_e-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^{(N_e-1)} & A_{22}^{(N_e-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N_e-2} \\ U_{N_e-1} \\ U_{N_e} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)}+f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)}+f_1^{(3)} \\ \vdots \\ f_2^{(N-3)}+f_1^{(N_e-2)} \\ f_2^{(N_e-2)}+f_1^{(N_e-1)} \\ f_2^{(N_e-1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} EndPoints_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ EndPoints_2^{(N_e-1)} \end{Bmatrix}$$

(32-4)...

وباختصار تأخذ الشّكل العام التّالي:

(33-4)... $$[A]\{\vec{U}\}=\{\vec{F}\}+\{\overrightarrow{EndPoints}\}$$

$$EndPoints_2^{(N_e-1)} = p(x_2^{N_e-1})\frac{d\tilde{U}^{(N_e-1)}\left(x_2^{N_e-1}\right)}{dx} \quad , \; EndPoints_1^{(1)} = -p(x_1^1)\frac{d\tilde{U}^{(1)}(x_1^1)}{dx}$$

هكذا نكون قد توصلنا إلى جملة مكونة من N_e معادلة خطيّة بـــ N_e+2 مجهول نُضيف إلى هذه المعادلات المعادلتين المرتبطتين بالعقدتين الطرفيتين واللتين يتمّ تحديدهما من خلال الشّروط الحديّة المفروضة التي سنناقشها لاحقاً.

ملاحظة(4−3):

إنّ المصفوفة **A** هي مصفوفة متناظرة وثلاثيّة الأقطار (***tridiagonal***) بغضِّ النّظر عن عدد العناصر المستخدمة في تجزئة القطعة المستقيمة، أي أنّ كل سطر في المصفوفة يحوي على الأكثر ثلاثة عناصر غير صفرية باستثناء السّطرين الأول والأخير فيحويان فقط عنصرين غير صفريين، وبشكل عام يكون لهذه المصفوفة الشّكل التّالي:

$$[A]=\begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 & \dots & & & & & & & \\ x & x & x & 0 & 0 & \dots & & & & & & \\ 0 & x & x & x & 0 & 0 & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & \dots & & & & \\ \dots & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & \dots & & & \\ & \dots & 0 & 0 & x & x & x & 0 & 0 & \dots & & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & & & & \dots & 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \quad (34-4)\dots$$

حيث تشير x إلى العناصر غير الصفرية.

4−3−3−3. تطبيق الشّروط الحديّة:

تُعتبر مرحلة تطبيق الشّروط الحديّة مرحلة أساسيّة في دراسة العناصر المنتهية إذ أنِّه وكما هو الحال في حلّ أي معادلة تفاضليّة يُمكن تحديد حلّ وحيد لهذه المعادلة بمجرد تحديد الشّروط الحديّة التي تحدد سلوك متغير الحقل على محيط المنطقة المدروسة، وتأتي هذه الشّروط الحديّة وفق أشكالٍ متنوعةٍ نذكر أشهرها تطبيقاً:

a) **شروط نيومان الحديّة (*Neumann Boundary Conditions*):**

وتُعطى شروط نيومان الحديّة في **(1-D)** بالعلاقات:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_{N_e}}=0 \quad (35-4)\dots$$

وتُعتبر هذه الشّروط هي الأبسط من حيث تطبيقها لإيجاد الحلّ العددي بطريقة العناصر المنتهية إذ تجعل **{*EndPoints*}=0** وبالتّالي تسمح بكتابة العبارة(4−33) بالشّكل:

$$[\mathbf{A}]\{\vec{U}\}=\{\vec{F}\}$$

تتحدّد فيها المقادير المعلومة والمجهولة وفق الجدول التّالي:

المعلوم	$EndPoints_1^{(N_e)} = EndPoints_2^{(N_e-1)} = 0$
المجهول	U_i حيث: $i = 1,2,\dots,N_e$

مثال(4−1):

لتكن لدينا القطعة المستقيمة المؤلّفة من ثلاثة عناصر والموضّحة بالشّكل (4−5)، ولنفرض أنّ المسألة تحقق المعادلة التّفاضليّة(4−1) وتحقق شروط نيومان الحديّة أي:

$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_{N_e}} = 0$ عندئذٍ تكون الجملة المصفوفيّة من أجل العنصر **e=1** بالشّكل:

$$\begin{matrix} \boxed{1} & \boxed{2} \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \ldots(4\text{−}36)$$

كذلك من أجل العنصر ***e*=2** نجد:

$$\begin{matrix} \boxed{2} & \boxed{3} \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad \ldots(4\text{−}37)$$

ومن أجل العنصر ***e*=3** نجد:

$$\begin{matrix} \boxed{3} & \boxed{4} \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} \\ A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^{(3)} \\ U_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} \quad \ldots(4\text{−}38)$$

$x_1^1 = x_1$ $\quad x_2^2 = x_1^3$

$U_2^1 = U_1^2$ $\quad U_2^3 = U_4$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

الشّكل (4−5) عنصر مستقيم مجزأ إلى ثلاثة عناصر

وهكذا نكون قد حصلنا على ستّ معادلات بأربعة مجاهيل U_1, U_2, U_3, U_4 لتقليص عدد المعادلات نستفيد من كون: $U_1^{(1)} = U_1$ و $U_2^{(1)} = U_1^{(2)} = U_2$ و $U_2^{(2)} = U_1^{(3)} = U_3$ و $U_2^{(3)} = U_4$ عند جمع عناصر المصفوفات المقابلة لنفس المجهول، إذ يُمكن إعادة صياغة العلاقات(4−35) حتّى (4−37) بالشّكل:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

نجمع المعادلات الأخيرة فنحصل على جملة المعادلات الخطيّة التّالية التي تحوي أربع معادلات بأربعة مجاهيل:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} + A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} + A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} \quad \ldots(39-4)$$

أصبح لدينا جملة مكونة من أربع معادلات بأربعة مجاهيل بحلّها نحصل على قيم U_i المنشودة.

وبهذا الشّكل نجد أنّ الخطوات أصبحت واضحة ويُمكن إنجازها يدوياً في حالة وجود جملة مؤلفة من عدد صغير من العناصر، لكنّ هذا الأمر لا ينطبق على الحالة التي تكون فيها المنطقة مجزّأة إلى عشرات العناصر، وكيف بنا في حالة وجود مئات أو آلاف العناصر؟!

ربّما يبدو للوهلة الأولى أنّ هذا الأمر مستحيل لكن عندما نعلم أنّه بإمكاننا تسخير الحاسوب لخدمتنا في هذا المضمار نستطيع القول إنّ الاستحالة أوشكت على الأفول وخصوصاً في ضوء بروز برامج متطورة ومتميزة كبرنامج ***Mathematica*** الذي سنعمل على إغنائه بخطوات برمجية ملائمة تمكّننا من إيجاد تقريبٍ ملائمٍ لحلول معادلات ماكسويل باستخدام طريقة العناصر المنتهية.

نعرض فيما يأتي هذه البرامج وفق خطوات تفصيلية نطبّقها مباشر على المسألة التّالية بغية التوضيح:

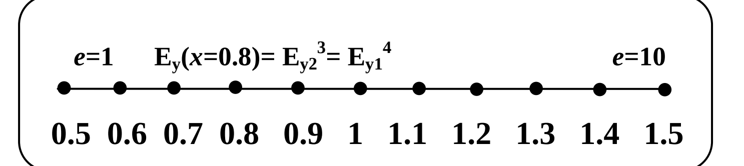
مسألة(4−1):

أوجد باستخدام طريقة العناصر المنتهية حلاً عددياً للمعادلة التّفاضليّة:

$$-\frac{d^2E_y(x)}{dx^2} + \pi^2 E_y(x) = 2\pi^2 sin\pi x \quad \mathbf{0.5 < x < 1.5}$$

المزوّدة بالشّروط الحديّة: $\frac{\partial E_y(x=0.5)}{\partial x} = \frac{\partial E_y(x=1.5)}{\partial x} = 0$

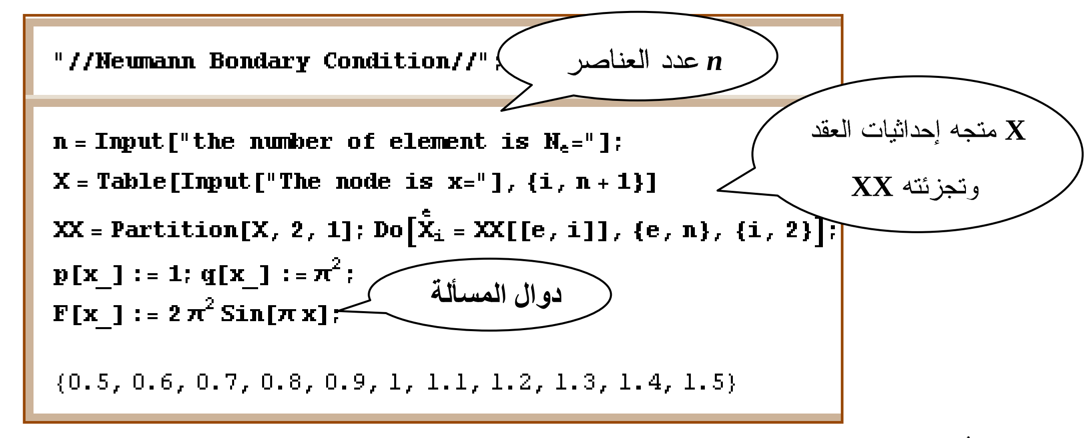
وذلك باستخدام تجزئة مكونة من عشرة عناصر، ثم قارن النتائج مع الحلّ التحليلي لهذه المسألة الذي يُعطى بالشّكل: $E_y(x) = sin\pi x$



الشّكل(4−6) تجزئة المجال **[0.5,1.5]** إلى عناصر طول كل منها **0.1**

الحلّ:

سنقوم في البداية بإعطاء أمر بإدخال بيانات المسألة:



ثم نُعرّف دوال الشّكل المرتبطة بكل عنصر:

$$N_1[x_, e_] := \frac{\hat{x}_2 - x}{\hat{x}_2 - \hat{x}_1};\quad N_2[x_, e_] := \frac{x - \hat{x}_1}{\hat{x}_2 - \hat{x}_1};$$

والآن أصبح بإمكاننا تشكيل الجملة المصفوفيّة لكل عنصر بالشّكل:

```
EMin = Table[0, {2}, {2}]; BMin = Table[0, {2}];
Ain = Table[0, {n + 1}, {n + 1}];
Bin = Table[0, {n + 1}];
```

مصفوفات صفرية تفيد في خطوات لاحقة

$$\text{elementmatrix}[e_, EMin_] := \text{Module}\Big[\{EM = EMin, i, j\},$$
$$\text{Do}\Big[\text{Do}\Big[EM[[i, j]] = \int_{\hat{x}_1}^{\hat{x}_2} (p[x]\, \partial_x N_i[x, e]\, \partial_x N_j[x, e] + q[x]\, N_i[x, e]\, N_j[x, e])\, dx, \{i, 2\}\Big], \{j, 2\}\Big];$$
$$\text{Return}[EM]\Big]$$

```
Do[em[i] = elementmatrix[i, EMin], {i, n}]
Print[em[2] // MatrixForm]
```

مصفوفة العنصر رقم *i*

$$\begin{pmatrix} 10.329 & -9.83551 \\ -9.83551 & 10.329 \end{pmatrix}$$

مصفوفة العنصر رقم 2

أمّا المصفوفات الموسّعة للعناصر فيُمكن إيجادها كما يلي:

```
Mergeelementmatrix[EM_, eftab_, Ain_] :=
  Module[{i, j, ii, jj, A = Ain, m = Length[eftab]},
   For[i = 1, i ≤ m, i++, ii = eftab[[i]];
    For[j = 1, j ≤ m, j++, jj = eftab[[j]]; A[[jj, ii]] = A[[ii, jj]] = EM[[i, j]]]];
   Return[A]];
```

المصفوفة الموسعة للعنصر (*i*)

```
Do[MM[i_] := Mergeelementmatrix[em[i], {i, i + 1}, Ain], {i, n}]
Print[MM[2] // MatrixForm]
```

```
0      0          0        0  0  0  0  0  0  0  0
0   10.329   -9.83551      0  0  0  0  0  0  0  0
0  -9.83551   10.329       0  0  0  0  0  0  0  0
0      0          0        0  0  0  0  0  0  0  0
0      0          0        0  0  0  0  0  0  0  0
0      0          0        0  0  0  0  0  0  0  0
0      0          0        0  0  0  0  0  0  0  0
0      0          0        0  0  0  0  0  0  0  0
0      0          0        0  0  0  0  0  0  0  0
0      0          0        0  0  0  0  0  0  0  0
0      0          0        0  0  0  0  0  0  0  0
```

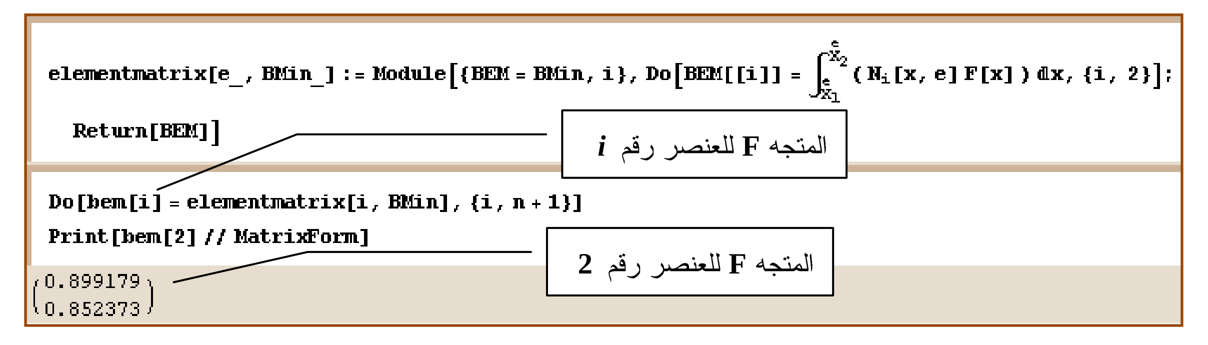
المصفوفة الموسعة للعنصر (2)

وأخيراً نحصل على المصفوفة المعمّمة للجملة من خلال جمع المصفوفات الموسّعة للعناصر:

```
M[i]; Print[ss // MatrixForm]
```

```
-9.83551     0          0          0          0          0          0          0          0          0
 20.658   -9.83551      0          0          0          0          0          0          0          0
-9.83551   20.658   -9.83551       0          0          0          0          0          0          0
   0      -9.83551   20.658   -9.83551       0          0          0          0          0          0
   0         0      -9.83551   20.658   -9.83551       0          0          0          0          0
   0         0          0      -9.83551   20.658   -9.83551       0          0          0          0
   0         0          0          0      -9.83551   20.658   -9.83551       0          0          0
   0         0          0          0          0      -9.83551   20.658   -9.83551       0          0
   0         0          0          0          0          0      -9.83551   20.658   -9.83551       0
   0         0          0          0          0          0          0      -9.83551   20.658   -9.83551
   0         0          0          0          0          0          0          0      -9.83551   10.329
```

أمّا المتّجه ***F*** المرتبط بكل عنصر فيُمكن إيجاده كما يلي:

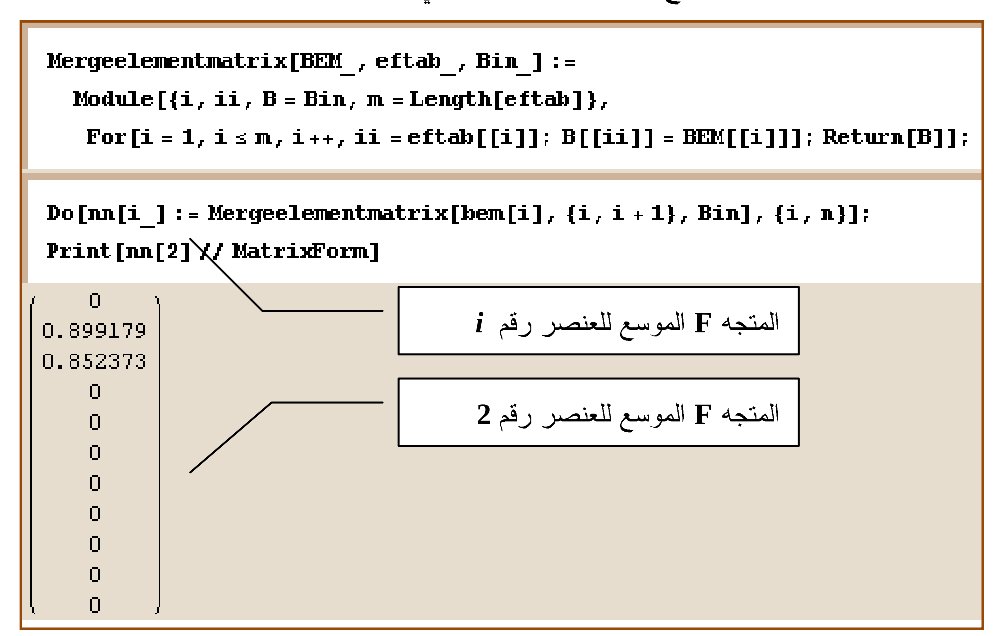



```
elementmatrix[e_, BMin_] := Module[{BEM = BMin, i}, Do[BEM[[i]] = ∫_{x̂1}^{x̂2} (Ni[x, e] F[x]) dx, {i, 2}];
  Return[BEM]]
```

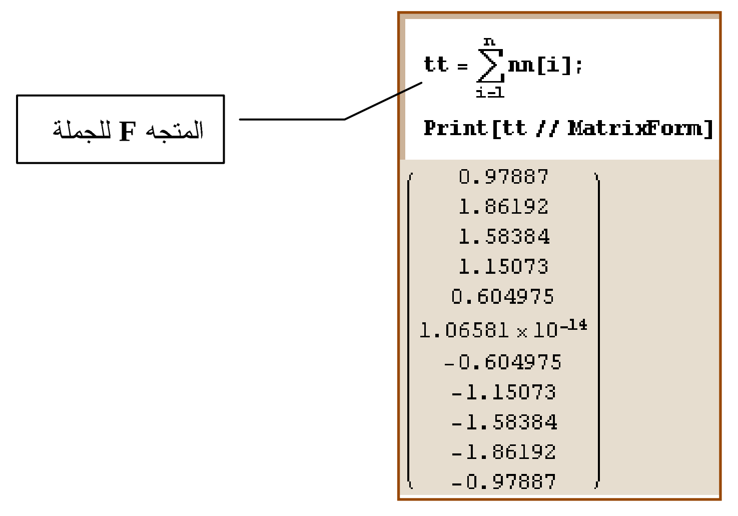
```
Do[bem[i] = elementmatrix[i, BMin], {i, n + 1}]
Print[bem[2] // MatrixForm]
```

```
(0.899179)
(0.852373)
```

يلي ذلك عمليّة كتابة المتجه F الموسع لهذه العناصر كما يلي:



وأخيراً بجمع المصفوفات السّابقة نحصل على المتجه F للجملة المدروسة:



والآن أصبح بإمكاّننا الحصول على قيم E_y عند عقد المنطقة المدروسة بحلّ جملة المعادلات الخطيّة الناتجة:

```
k = LinearSolve[ss, tt]; Print[MatrixForm[tt]]
```

$$\begin{pmatrix} 0.97887 \\ 1.86192 \\ 1.58384 \\ 1.15073 \\ 0.604975 \\ 1.06581\times 10^{-14} \\ -0.604975 \\ -1.15073 \\ -1.58384 \\ -1.86192 \\ -0.97887 \end{pmatrix}$$

المقارنة بين الحلّ التحليلي والحل باستخدام *FEM*:

يُمكننا المقارنة بين الحلّين التحليلي والعددي عند العقد من خلال الجدول التّالي:

```
kk = Table[Sin[π X[[i]]], {i, 1, n + 1}];
error = Table[Abs[k[[i]] - kk[[i]]], {i, 1, n + 1}];
Print[
 Transpose[{Join[{"node"}, X], Join[{"Ey^FEM"}, k], Join[{"Ey^exact"}, kk],
   Join[{"Error=|Ey^FEM-Ey^exact|"}, error]}] // MatrixForm]
```

node	E_y^{FEM}	E_y^{exact}	Error=$\lvert E_y^{FEM}-E_y^{exact}\rvert$
0.5	1.00411	1.	0.00410877
0.6	0.954964	0.951057	0.00390768
0.7	0.812341	0.809017	0.00332407
0.8	0.5902	0.587785	0.00241508
0.9	0.310287	0.309017	0.00126968
1	-2.24673×10^{-14}	0	2.24673×10^{-14}
1.1	-0.310287	-0.309017	0.00126968
1.2	-0.5902	-0.587785	0.00241508
1.3	-0.812341	-0.809017	0.00332407
1.4	-0.954964	-0.951057	0.00390768
1.5	-1.00411	-1.	0.00410877

الجدول(4−1) المقارنة بين الحل التحليلي والحل بطريقة **FEM** باستخدام عشرة عناصر

ملاحظة(4−2):

نلاحظ من الجدول السابق أن الحلّ التقريبي يقترب وبشكل كبير من الحلّ الفعلي عند القيمة ***x*=1** والتي تمثل نقطة انعطاف للدالة ***Sinπx***، في حين يتوزع الخطأ بشكل متناظر على طرفي هذه القيمة وتزداد قيمته كلما ابتعدنا عن نقطة الانعطاف حتى يأخذ أعظم قيمة له عند النهايات المحلّية، والرسم البياني التّالي يوضح ذلك:

```
In[34]:=
rr = Table[N1[x, e] k[[e]] + N2[x, e] k[[e + 1]], {e, 1, n}];
discreteplot[i_] := Plot[rr[[i]], {x, X[[i]], X[[i + 1]]},
   DisplayFunction → Identity];
gg = Join[Table[discreteplot[i], {i, 1, n}]];
pp = Show[gg, DisplayFunction → Identity];
u = ListPlot[Table[{X[[s]], k[[s]]}, {s, 1, n + 1}],
   PlotStyle → PointSize[0.02], DisplayFunction → Identity];
v = Plot[Sin[π x], {x, 0, 2},
   PlotStyle → {Dashing[{0.02, 0.05}], Hue[0.8], Thickness[0.01]},
   DisplayFunction → Identity];
l = Show[u, v, pp, DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesOrigin → {0, 0}]

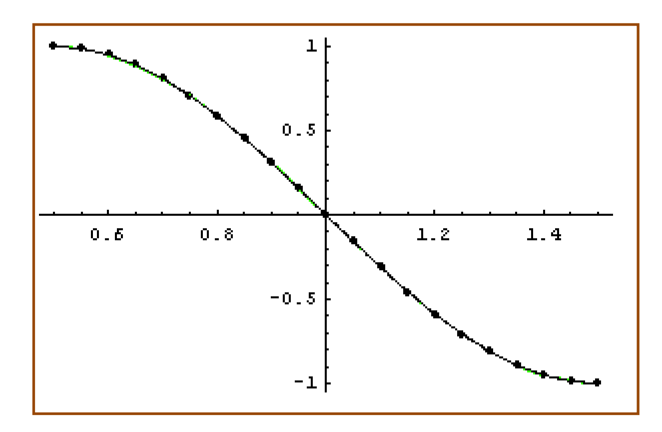
Out[40]= - Graphics -
```

الشّكل(4−7) المقارنة بين الحل التحليلي والحل باستخدام عشرة عناصر في **FEM**

أمّا إذا استخدمنا عشرين عنصراً بدلاً عن عشرة عناصر فسنحصل على النتائج التّالية:

node	E_y^{FEM}	E_y^{exact}	$Error=\lvert E_y^{FEM}-E_y^{exact}\rvert$
0.5	1.00103	1.	0.00102787
0.55	0.988704	0.987688	0.00101521
0.6	0.952034	0.951057	0.000977562
0.65	0.891922	0.891007	0.000915839
0.7	0.809849	0.809017	0.000831564
0.75	0.707834	0.707107	0.000726814
0.8	0.588389	0.587785	0.000604167
0.85	0.454457	0.45399	0.000466643
0.9	0.309335	0.309017	0.000317629
0.95	0.156595	0.156434	0.000160794
1	4.85345×10^{-13}	0	4.85345×10^{-13}
1.05	-0.156595	-0.156434	0.000160794
1.1	-0.309335	-0.309017	0.000317629
1.15	-0.454457	-0.45399	0.000466643
1.2	-0.588389	-0.587785	0.000604167
1.25	-0.707834	-0.707107	0.000726814
1.3	-0.809849	-0.809017	0.000831564
1.35	-0.891922	-0.891007	0.000915839
1.4	-0.952034	-0.951057	0.000977562
1.45	-0.988704	-0.987688	0.00101521
1.5	-1.00103	-1.	0.00102787

الجدول(4−2) المقارنة بين الحل التحليلي والحل بطريقة **FEM** باستخدام عشرين عنصراً



الشّكل(4−8) بين الحل التحليلي والحل باستخدام عشرين عنصراً في **FEM** بيانياً

بالمقارنة بين الجدولين نستطيع أن نلاحظ بوضوح تناقص الخطأ بازدياد عدد العناصر.

b) شروط ديرخليه الحديّة ***(Dirichlet Boundary Conditions)***:

تفترض شروط ديرخليه الحديّة انعدام الحقل أو الكمون عند أطراف المنطقة المدروسة أي:

$$U(x)|_{x=x_0} = U(x)|_{x=x_{N_e}} = 0$$

وبالتّالي فإن **{EndPoints}≠0** ويتمّ ضمّها إلى مجاهيل المسألة المدروسة لتصبح لدينا القيم المعلومة والمجهولة كالآتي:

المعلوم	$U_1 = U_{N_e} = 0$
المجهول	U_i حيث: $i = 2,3,\dots,N_e - 1$ و $\text{EndPoints}_1^{(N_e)}, \text{EndPoints}_2^{(N_e-1)}$

مثال(4−2):

لتكن لدينا القطعة المستقيمة المؤلفة من ثلاثة عناصر والموضحة بالشّكل (4−5)، ولنفرض أنّ المسألة تحقق شروط دير خليه الحديّة عندئذٍ نظراً لأنّ الحدّ ***EndPoints*** يؤثّر في العقدتين الأولى والأخيرة فقط فإنّنا نحصل على الجملة التّالية التي تحوي ($N_e = 4$) معادلة بـــ($N_e = 4$) مجهول:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} + A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} + A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \text{EndPoints}_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \text{EndPoints}_2^{(N_e-1)} \end{Bmatrix}$$

(40−4)...

لكن ***U₁=U₄=0*** لذا يصبح بإمكاننا الاستغناء عن المعادلتين الأولى والأخيرة من الجملة لنحصل على جملة مؤلفة من **N-2=2** معادلة خطيّة بـــ **N-2=2** مجهول كما يلي:

$$\begin{bmatrix} A_{22}^{(1)} + A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} + A_{11}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (41-4)...$$

بالحلّ نجد أنّ:

$$\begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22}^{(1)} + A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} + A_{11}^{(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \end{Bmatrix}$$

وأخيراً بالتبديل في المعادلتين الأولى والأخيرة من (3−40) نجد أن:

$$\begin{aligned} EndPoints_1^{(1)} &= A_{11}^{(1)} U_1 - A_{12}^{(1)} U_2 - f_1^{(1)} \\ EndPoints_2^{(N_e-1)} &= A_{21}^{(N_e-1)} U_{N_e-1} - A_{22}^{(N_e-1)} U_{N_e} - f_2^{(N_e-1)} \end{aligned} \quad (42-4)...$$

أمّا الخطوات البرمجية فسنوضحها من خلال المسألة التّالية:

مسألة(4−2):

أوجد باستخدام طريقة العناصر المنتهية حلاً عددياً للمعادلة التّفاضليّة:

$$-\frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + \pi^2 E_y(x) = 2\pi^2 sin\pi x \quad \mathbf{0 < x < 1}$$

والمحققة لشروط ديرخليه الحديّة: $E_y(x=0) = E_y(x=1) = 0$

وذلك باستخدام تجزئة مكونة من عشرة عناصر، ثم قارن النتائج مع الحل التحليلي:

$$E_y(x) = sin\pi x$$

e=1 $E_y(x=0.3) = E_{y2}^3 = E_{y1}^4$ e=10

0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

الشّكل(4−9) تجزئة المجال **[0,1]** إلى عناصر طول كل منها **0.1**

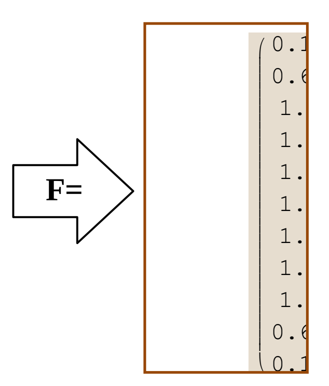
الحلّ:

نستطيع وبخطوات مماثلة تماماً لتلك المتبعة في حالة شروط نيومان الحديّة أن نُوجد المصفوفتين ***A,F*** المقابلتين لتجزئة منتظمة للمجال **[0,1]** مكونة من عشرة عناصر طول كل منها **Δ*x*=0.1** لنجد أنّهما تُعطيان بالشّكل:

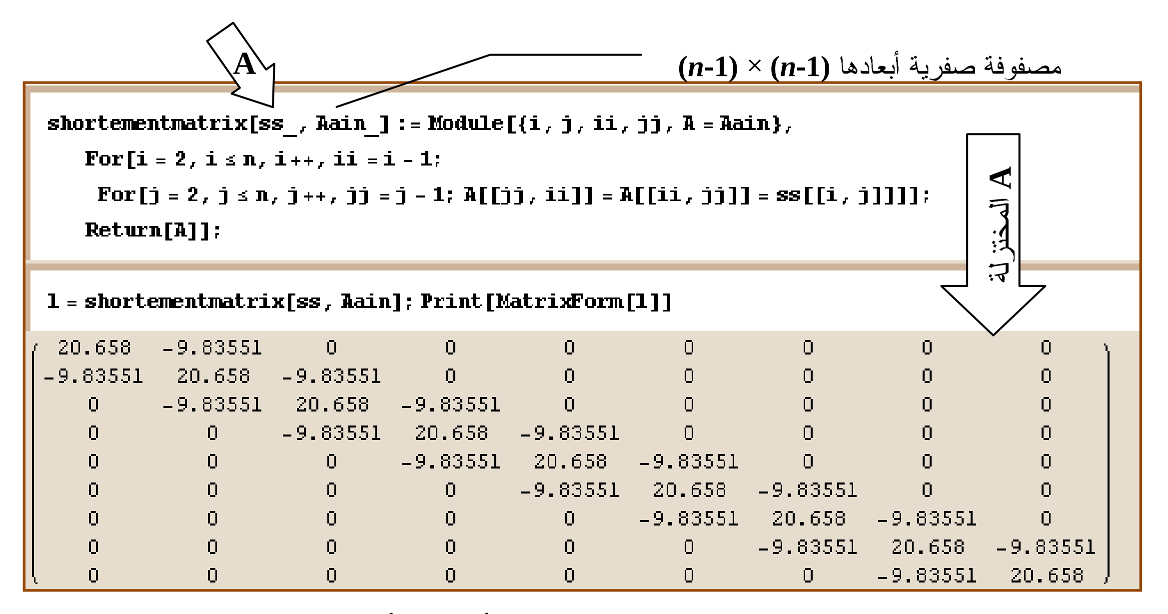
```
ss = Sum[MM[i], {i, 1, n}]; Print[MatrixForm[ss]]
```

A=

10.329	-9.83551	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9.83551	10.329



ذكرنا أنه يُمكن نظراً لانعدام قيمة U عند العقدتين الطرفيتين أن نحذف المعادلتين الأولى والأخيرة من جملة المعادلات الأخيرة وهذا يكافئ تطبيق البرنامج التّالي الذي يسمح بكتابة المصفوفة A بالشّكل المختصر الذي سنراه فور تنفيذ البرنامج:

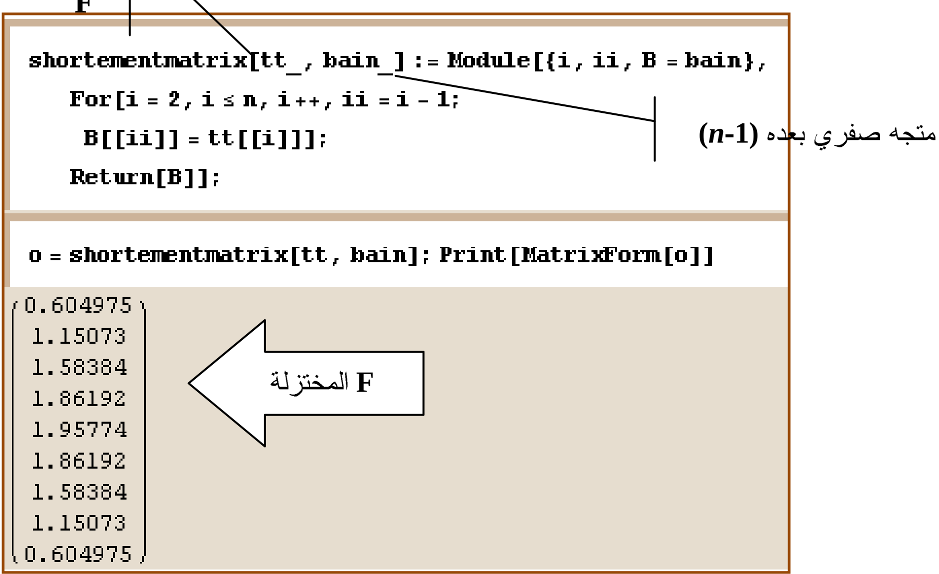



```
shortementmatrix[ss_, Aain_] := Module[{i, j, ii, jj, A = Aain},
  For[i = 2, i ≤ n, i++, ii = i - 1;
   For[j = 2, j ≤ n, j++, jj = j - 1; A[[jj, ii]] = A[[ii, jj]] = ss[[i, j]]]];
  Return[A]];

l = shortementmatrix[ss, Aain]; Print[MatrixForm[l]]
```

20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0	0
-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0
0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0
0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0
0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0
0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0
0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0
0	0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551
0	0	0	0	0	0	0	-9.83551	20.658

بالإضافة إلى هذا البرنامج الذي يُمكننا من حذف السطرين الأول و الأخير من F:




```
shortementmatrix[tt_, bain_] := Module[{i, ii, B = bain},
  For[i = 2, i ≤ n, i++, ii = i - 1;
   B[[ii]] = tt[[i]]];
  Return[B]];

o = shortementmatrix[tt, bain]; Print[MatrixForm[o]]
```

0.604975
1.15073
1.58384
1.86192
1.95774
1.86192
1.58384
1.15073
0.604975

بحلّ جملة المعادلات $A`U`=F`$ حيث $A`,F`$ المصفوفتين المختزلتين للمصفوفتين A,F نحصل على قيم $U_i\ ;i=2,3,...,10$ التّالية:

```
ss = LinearSolve[l, o]; Print[MatrixForm[o]]
```

```
0.604975
1.15073
1.58384
1.86192
1.95774
1.86192
1.58384
1.15073
0.604975
```

المقارنة مع الحلّ التحليلي:

والآن يُمكننا المقارنة بين الحلّين التقريبي والتحليلي عند العقد من خلال الجدول:

```
k = Join[{0}, ss, {0}];
kk = Table[Sin[π X[[i]]], {i, 1, n + 1}];
error = Table[Abs[k[[i]] - kk[[i]]], {i, 1, n + 1}];
Print[
 Transpose[{Join[{"node"}, X], Join[{"E_Y^FEM"}, k], Join[{"E_Y^exact"}, kk],
   Join[{"Error=|E_Y^FEM-E_Y^exact|"}, error]}] // MatrixForm]
```

node	E_y^{FEM}	E_y^{exact}	$Error=\lvert E_y^{FEM}-E_y^{exact}\rvert$
0	0	0	0
0.1	0.310287	0.309017	0.00126968
0.2	0.5902	0.587785	0.00241508
0.3	0.812341	0.809017	0.00332407
0.4	0.954964	0.951057	0.00390768
0.5	1.00411	1.	0.00410877
0.6	0.954964	0.951057	0.00390768
0.7	0.812341	0.809017	0.00332407
0.8	0.5902	0.587785	0.00241508
0.9	0.310287	0.309017	0.00126968
1	0	0	0

الجدول(3-4) المقارنة بين الحل التحليلي والحل بطريقة FEM باستخدام عشرة عناصر

نلاحظ من الجدول السابق أنّ الخطأ يأخذ أعظم قيمة له عند النقطة **x=0.5** النهاية المحلّية للدالة ***$Sin\pi x$***، ويتناقص بشكل تدريجي ومتناظر على طرفيها إلى أن يأخذ أصغر قيمة له عند نقطتي الانعطاف **x=0**, x=1 والرسم البياني التّالي يوضح ذلك:

```
rr = Table[N1[x, e] k[[e]] + N2[x, e] k[[e + 1]], {e, 1, n}];
discreteplot[i_] := Plot[rr[[i]], {x, X[[i]], X[[i + 1]]}, DisplayFunction → Identity]
gg = Join[Table[discreteplot[i], {i, 1, n}]];
pp = Show[gg, DisplayFunction → Identity];
u = ListPlot[Table[{X[[s]], k[[s]]}, {s, 1, n + 1}], PlotStyle → PointSize[0.02],
   DisplayFunction → Identity];
v = Plot[Sin[π x], {x, 0, 1}, PlotStyle → {Dashing[{0.02, 0.03}], Hue[0.9], Thickness[0.01]},
   DisplayFunction → Identity];
l = Show[u, v, pp, DisplayFunction → $DisplayFunction]

- Graphics -
```

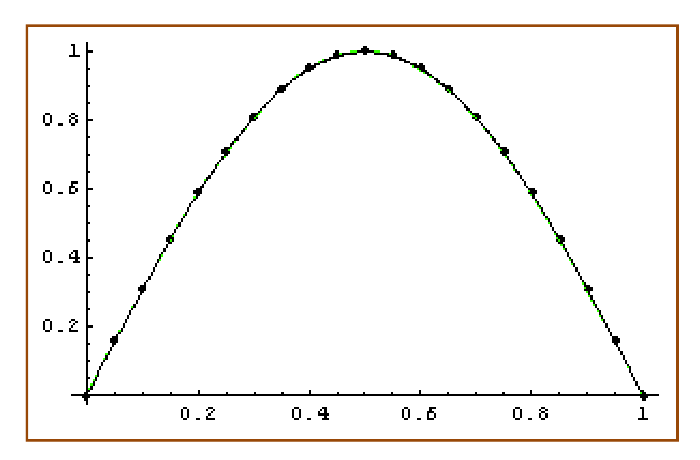
الشّكل(4−10) المقارنة بين الحل التحليلي والحل بطريقة **FEM** باستخدام عشرة عناصر

أمّا لو استخدمنا عشرين عنصراً بدلاً من عشرة فقط حصلنا على النتائج التّالية:

node	E_y^{FEM}	E_y^{exact}	$Error = \lvert E_y^{FEM} - E_y^{exact} \rvert$
0	0	0	0
0.05	0.156595	0.156434	0.000160794
0.1	0.309335	0.309017	0.000317629
0.15	0.454457	0.45399	0.000466643
0.2	0.588389	0.587785	0.000604167
0.25	0.707834	0.707107	0.000726814
0.3	0.809849	0.809017	0.000831564
0.35	0.891922	0.891007	0.000915839
0.4	0.952034	0.951057	0.000977562
0.45	0.988704	0.987688	0.00101521
0.5	1.00103	1.	0.00102787
0.55	0.988704	0.987688	0.00101521
0.6	0.952034	0.951057	0.000977562
0.65	0.891922	0.891007	0.000915839
0.7	0.809849	0.809017	0.000831564
0.75	0.707834	0.707107	0.000726814
0.8	0.588389	0.587785	0.000604167
0.85	0.454457	0.45399	0.000466643
0.9	0.309335	0.309017	0.000317629
0.95	0.156595	0.156434	0.000160794
1	0	0	0

الجدول(4−4) المقارنة بين الحل التحليلي والحل بطريقة **FEM** باستخدام عشرين عنصراً

وهذا ما يؤكد تناقص الخطأ بازدياد عدد العناصر المستخدمة، والرسم البياني التّالي يوضح ذلك:



الشّكل(4-11) المقارنة بين الحل التحليلي والحل بطريقة FEM باستخدام عشرين عنصراً بيانياً

c) الشّروط الحديّة غير المتجانسة (*Inhomogeneous Boundary Conditions*):

قد نصادف حالات لا ينعدم فيها الحقل أو الكمون عند العقد الطرفية، كما في حالة المكثف ذو الصفائح المتوازية إذ تكون قيمة الكمون عند الصفيحة العلوية تساوي V_a، عندئذٍ نسمي الشّروط الحديّة المفروضة بشروط نيومان وديرخليه غير المتجانسة.

مثال(4−3):

لتكن لدينا القطعة المستقيمة المؤلفة من ثلاثة عناصر والموضحة بالشّكل (4−5)، ولنفرض أنّ المسألة تحقق المعادلة التّفاضليّة(4−1) وتحقق الشّروط الحديّة التّالية: $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_n}=Q_n$, $U_1=Q_0$.

نبدل Q_n في $EndPoints_2^{(x_n)}$ فنحصل على المقدار: $\tilde{Q}_n = EndPoints_2^{(x_n)} = Q_n P(x_n)$.

وبالتّالي تصبح المعادلات(4−32) بالشّكل:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)}+A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)}+A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_0 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EndPoints_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{Q}_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)}+f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)}+f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

بما أن U_1 معلومة فيُمكننا حذف المعادلة الأولى من الجملة السّابقة وكتابة الجملة الجديدة بالشّكل:

$$\begin{bmatrix} A_{22}^{(1)}+A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & 0 \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)}+A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} \\ 0 & A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{(1)}+f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)}+f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -A_{21}^{(1)}Q_0 \\ 0 \\ \tilde{Q}_n \end{Bmatrix} \quad (43-4)\ldots$$

بحلّ جملة المعادلات الخطيّة السّابقة بالنسبة للمجاهيل: U_2, U_3, U_4 نحصل على الحلّ المنشود.

أمّا $EndPoints_1^{(1)}$ فيُمكن حسابها من العلاقة:

$$EndPoints_1^{(1)} = A_{11}^{(1)}Q_0 + A_{12}^{(1)}U_2 - f_1^{(1)} \quad (44-4)\ldots$$

مسألة(4−3):

أوجد باستخدام طريقة العناصر المنتهية حلاً عددياً للمعادلة التّفاضليّة:

$$-\frac{d^2E_y(x)}{dx^2}+\pi^2E_y(x)=2\pi^2 sin\pi x \quad \mathbf{0<x<1}$$

والمحققة للشروط الحديّة: $E_y(x=0)=0$ و $\frac{\partial E_y(x=1)}{\partial x}=-\pi$.

وذلك باستخدام تجزئة مكونة من عشرة عناصر، ثم قارن النتائج مع الحلّ التحليلي لهذه المسألة:

$$E_y(x)=sin\pi x$$

الحلّ:

نوجد وبخطوات مماثلة تماماً لتلك المتبعة في حالة شروط نيومان الحديّة المصفوفتين ***A,F*** التّاليتين المقابلتين لتجزئة منتظمة للمجال **[0,1]** مكونة من عشرة عناصر طول كل منها **$\Delta x=0.1$**:

```
ss = Sum[MM[i], {i, 1, n}]; Print[MatrixForm[ss]]
```

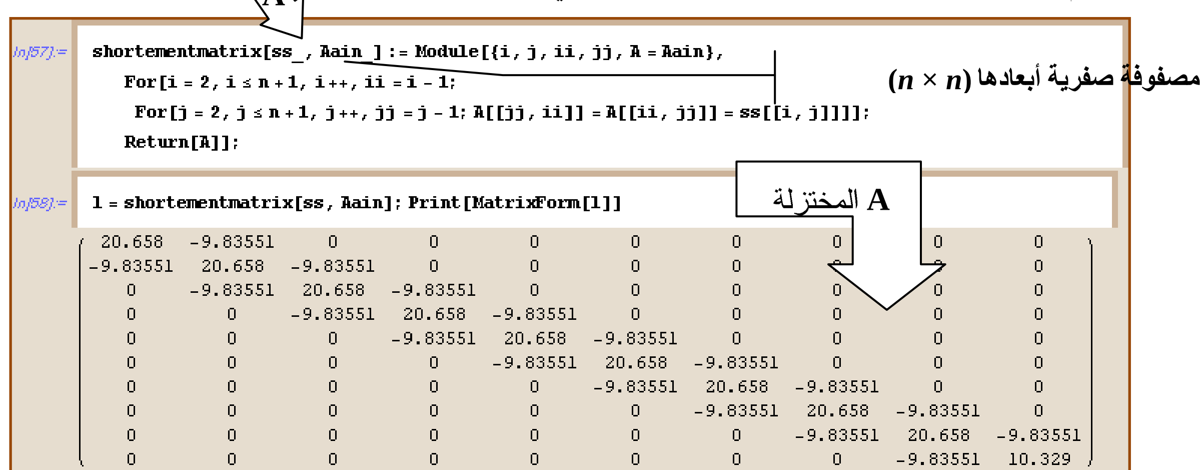
A=

10.329	-9.83551	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9.83551	10.329

F =

F
0.102845
0.604975
1.15073
1.58384
1.86192
1.95774
1.86192
1.58384
1.15073
0.604975
0.102845

ويتمّ بعد ذلك حذف السطر الأول من ***A,F*** كما يلي:



```
In[57]:= shortementmatrix[ss_, Aain_] := Module[{i, j, ii, jj, A = Aain},
  For[i = 2, i ≤ n + 1, i++, ii = i - 1;
   For[j = 2, j ≤ n + 1, j++, jj = j - 1; A[[jj, ii]] = A[[ii, jj]] = ss[[i, j]]]];
  Return[A]];

In[58]:= l = shortementmatrix[ss, Aain]; Print[MatrixForm[l]]
```

20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0	0	0
-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0	0
0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0	0
0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0	0
0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0	0
0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0	0
0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0	0
0	0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551	0
0	0	0	0	0	0	0	-9.83551	20.658	-9.83551
0	0	0	0	0	0	0	0	-9.83551	10.329

F

```
shortementmatrix[tt_, bain_] := Module[{i, ii, B = bain},
   B[[1]] = tt[[2]] - Q0 * MM[[1]][[2, 1]]; B[[n]] = tt[[n + 1]] + Q̂n ;
   For[i = 3, i ≤ n, i++, ii = i - 1;
    B[[ii]] = tt[[i]]]; Return[B]];
```

متجه صفري بعده (n)

```
o = shortementmatrix[tt, bain]; Print[MatrixForm[o]]
```

$$\begin{pmatrix} 0.604975 \\ 1.15073 \\ 1.58384 \\ 1.86192 \\ 1.95774 \\ 1.86192 \\ 1.58384 \\ 1.15073 \\ 0.604975 \\ -3.03875 \end{pmatrix}$$

F المختزلة الجديدة

نحلّ جملة المعادلات الخطيّة الناتجة ونقارن النتائج:

```
ss = LinearSolve[l, o];
k = Join[{Q0}, ss];
kk = Table[Sin[π X[[i]]], {i, 1, n + 1}];
error = Table[Abs[k[[i]] - kk[[i]]], {i, 1, n + 1}];
Print[
 Transpose[{Join[{"node"}, X], Join[{"Ey^FEM"}, k], Join[{"Ey^exact"}, kk],
   Join[{"Error=|Ey^FEM-Ey^exact|"}, error]}] // MatrixForm]
```

node	E_y^{FEM}	E_y^{exact}	Error=$\lvert E_y^{FEM}-E_y^{exact}\rvert$
0	0	0	0
0.1	0.3104	0.309017	0.00138292
0.2	0.590438	0.587785	0.00265291
0.3	0.812727	0.809017	0.00371037
0.4	0.955538	0.951057	0.0044812
0.5	1.00493	1.	0.00492708
0.6	0.956109	0.951057	0.00505287
0.7	0.813928	0.809017	0.00491107
0.8	0.592388	0.587785	0.00460314
0.9	0.313295	0.309017	0.00427837
1	0.00413123	0	0.00413123

الجدول(4-5) المقارنة بين الحل التحليلي والحل بطريقة **FEM** باستخدام عشرة عناصر

نلاحظ هذه المرّة عدم وجود تناظر في توزع الخطأ على المنطقة المدروسة، إلا أنه يبلغ أعظم قيمة له كما يبدو في الجدول عند $x=0.6$ ويتناقص على طرفيها، ويعود ذلك لكون الشّروط الحديّة غير متجانسة.

```
rr = Table[N1[x, e] k[[e]] + N2[x, e] k[[e + 1]], {e, 1, 10}];
discreteplot[i_] := Plot[rr[[i]], {x, X[[i]], X[[i + 1]]}, DisplayFunction → Identity];
gg = Join[Table[discreteplot[i], {i, 1, n}]];
pp = Show[gg, DisplayFunction → Identity];
u = ListPlot[Table[{X[[s]], k[[s]]}, {s, 1, 11}], PlotStyle → PointSize[0.02],
   DisplayFunction → Identity];
v = Plot[Sin[π x], {x, 0, 1}, PlotStyle → {Dashing[{0.02, 0.03}], Hue[0.9], Thickness[0.01]},
   DisplayFunction → Identity];
l = Show[u, v, pp, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```



```
- Graphics -
```

الشّكل(4-12) المقارنة بين الحل التحليلي والحل بطريقة **FEM** باستخدام عشرة عناصر بيانياً

d) شروط الممانعة الحديّة (نيوتن) *(Impedance Boundary Conditions)*:

تربط شروط الممانعة الحديّة بين المتغير ومشتقه الناظمي إذ تعطى بالعلاقة:

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \alpha U = 0 \quad on\, \partial\Omega \qquad ; \alpha = \text{ثابت} \qquad (45-4)...$$

ولقد لُوحظ أنّ لهذا الشرط أهميّة كبيرة في دراسة المسائل التي تكون فيها المنطقة المدروسة مغطّاة بطبقة عازلة رقيقة، لأنّه لا يحتاج إلى اللّجوء لعملية تجزئة المنطقة الدّاخليّة للعازل، كما أنّها تلعب دوراً هامّا في شروط الإشعاع والامتصاص في **(1-D)** .

وبشكلٍ أعم يُمكن كتابة الشرط (4-45) كما يلي:

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \alpha U = \beta \quad on\, \partial\Omega \qquad (46-4)...$$

حيث أن α و β عددان ثابتان

أمّا في حالة المسائل التابعة لمتغير وحيد أي في **(1-D)** فيُمكن كتابتها كما يلي:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \alpha_0 U = \beta_0 \quad ; x = x_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \alpha_n U = \beta_a \quad ; x = n \qquad (47-4)...$$

مثال(4-3):

لتكن لدينا القطعة المستقيمة المؤلفة من ثلاثة عناصر الموضحة بالشّكل (4-5)، ولنفرض أن المسألة تحقق المعادلة التّفاضليّة(4-1) وتحقق الشّروط الحديّة المعطاة بالعلاقات(4-47) عندئذٍ نحصل بعد إيجاد المعادلات العنصرية وتجميعها على العلاقات(4-40) التي تكون فيها هنا:

$$EndPoints_2^{(n-1)} = p(x_n)(\beta_n - \alpha_n U_n)$$
$$EndPoints_1^{(1)} = p(0)(\beta_0 - \alpha_0 U_1)$$

نبدّل في(4-40) لنجد أن:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^1 - \alpha_0 p(0) & A_{12}^1 & 0 & 0 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 + A_{11}^2 & A_{12}^2 & 0 \\ 0 & A_{21}^2 & A_{22}^2 + A_{11}^3 & A_{12}^3 \\ 0 & 0 & A_{21}^3 & A_{22}^3 + \alpha_n p(x_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\beta_0 p(0) \\ 0 \\ 0 \\ +\beta_n p(x_n) \end{Bmatrix} \quad (48-4)\ldots$$

وهكذا نكون حصلنا على جملة معادلات خطيّة مكوّنة من أربع معادلات بأربعة مجاهيل بحلها نكون قد أوجدنا المجاهيل **$U_1,\ldots,U_4$**، وكما هو ملحوظ لا تؤثر شروط الممانعة الحديّة إلا على المعادلتين الأولى والأخيرة فقط.

مسألة(4-4):

أوجد باستخدام طريقة العناصر المنتهية حلاً عددياً للمعادلة التّفاضليّة:

$$-\frac{d^2E_y(x)}{dx^2} + \pi^2 E_y(x) = 2\pi^2 sin\pi x \quad \mathbf{0.25 < x < 1.25}$$

والمحققة للشروط الحديّة: $\frac{\partial U}{\partial x} - \pi U = 0 \;\; ; x = 0.25$ ، $\frac{\partial U}{\partial x} + \pi U = 0 \;\; ; x = 1.25$

وذلك باستخدام تجزئة مكونة من عشرة عناصر، ثم قارن النتائج مع الحلّ التحليلي لهذه المسألة.

$$E_y(x) = e^{-\pi x}(0.013932e^{2\pi x} + e^{\pi x} sin\pi x)$$

الحلّ:

نبدأ بإدخال البيانات المعطاة كما يلي:

```
n = Input["e="]; X = Table[Input["The node is x="], {i, n + 1}]
XX = Partition[X, 2, 1];
Do[X̂_i = XX[[e, i]], {e, n}, {i, 2}];

{0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95, 1.05, 1.15, 1.25}
```

```
p[x_] := 1; q[x_] := π^2;
F[x_] := 2 π^2 Sin[π x];
N1[x_, e_] := (X̂2 - x)/(X̂2 - X̂1); N2[x_, e_] := (x - X̂1)/(X̂2 - X̂1); αn = π; α0 = -π;
βn = 0;
β0 = 0;
```

```
EMin = Table[0, {2}, {2}]; Ain = Table[0, {n + 1}, {n + 1}]; Bin = Table[0, {n + 1}];
Aain = Table[0, {n}, {n}];
bain = Table[0, {n}];
```

```
elementmatrix[e_, EMin_] :=
 Module[{EM = EMin, i, j},
  Do[Do[EM[[i, j]] = ∫_{X̂1}^{X̂2} (p[x] ∂x Ni[x, e] ∂x Nj[x, e] + q[x] Ni[x, e] Nj[x, e]) dx, {i, 2}], {j, 2}];
  Return[EM]]
```

```
Do[em[i] = elementmatrix[i, EMin], {i, n}]
em[2] // MatrixForm
```

])//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.91887 \\ 0.95073 \end{pmatrix}$$

```
Mergeelementmatrix[EM_, eftab_, Ain_] :=
  Module[{i, j, ii, jj, A = Ain, m = Length[eftab]},
   For[i = 1, i ≤ m, i++, ii = eftab[[i]];
    For[j = 1, j ≤ m, j++, jj = eftab[[j]]; A[[jj, ii]] = A[[ii, jj]] = EM[[i, j]]]];
   Return[A]];
```

```
Do[MM[i_] := Mergeelementmatrix[em[i], {i, i + 1}, Ain], {i, 1, n}];
MM[2] // MatrixForm
```

]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.329 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9.83551 & 10.329 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Sum[MM[i], {i, 1, n}] // MatrixForm
```

Out[16]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix}
10.329 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 10.329
\end{pmatrix}$$

```
endpoints = Ain;
endpoints[[1, 1]] = -α0 p[X1^1];
endpoints[[n + 1, n + 1]] = αn p[X2^n];
Print[MatrixForm[endpoints]]
```

$$\begin{pmatrix}
\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi
\end{pmatrix}$$

```
ss = Sum[MM[i], {i, 1, n}] + endpoints; Print[MatrixForm[ss]];
```

$$\begin{pmatrix}
13.4706 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 20.658 & -9.83551 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.83551 & 13.4706
\end{pmatrix}$$

```
elementmatrix[e_, Bin_] := Module[{BEM = Bin, i}, Do[BEM[[i]] = Integrate[(N_i[x, e] F[x]), {x, X1^e, X2^e}], {i, 2}];
  Return[BEM]]

Do[bem[i] = elementmatrix[i, Bin], {i, n}]

Mergeelementmatrix[BEM_, eftab_, Bin_] :=
  Module[{i, ii, B = Bin, m = Length[eftab]},
   For[i = 1, i ≤ m, i++, ii = eftab[[i]]; B[[ii]] = BEM[[i]]]; Return[B]];

Do[mm[i_] := Mergeelementmatrix[bem[i], {i, i + 1}, Bin], {i, n + 1}];
```

```
Bendpoints = Bin;
Bendpoints[[1]] = -β0 p[X1^1];
Bendpoints[[n + 1]] = βn p[X2^n];
Print[MatrixForm[Bendpoints]];
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
tt = Sum[nn[i], {i, 1, n}] + Bendpoints; Print[MatrixForm[tt]]
```

$$\begin{pmatrix} 0.764888 \\ 1.74436 \\ 1.93364 \\ 1.93364 \\ 1.74436 \\ 1.38433 \\ 0.888795 \\ 0.306258 \\ -0.306258 \\ -0.888795 \\ -0.619443 \end{pmatrix}$$

```
k = LinearSolve[ss, tt]

{0.740316, 0.936159, 1.04859, 1.06964, 1.00144,
 0.856369, 0.656485, 0.432111, 0.21996, 0.0610201, -0.00143122}
```

المقارنة بين الحلّ التحليلي والحلّ العددي:

```
kk = Table[N[e^(-π X[[i]]) (0.013932 e^(2 π X[[i]]) + e^(π X[[i]]) Sin[π X[[i]]])], {i, 1, n + 1}];
error = Table[Abs[k[[i]] - kk[[i]]], {i, 1, n + 1}];
Print[
 Transpose[{Join[{"node"}, X], Join[{"Ey^FEM"}, k], Join[{"Ey^exact"}, kk],
   Join[{"Error=|Ey^FEM-Ey^exact|"}, error]}] // MatrixForm]
```

node	E_y^{FEM}	E_y^{exact}	Error $=\lvert E_y^{FEM}-E_y^{exact}\rvert$
0.25	0.740242	0.737664	0.00257799
0.35	0.936057	0.932842	0.00321492
0.45	1.04845	1.04497	0.00348373
0.55	1.06945	1.06611	0.00334554
0.65	1.00117	0.99837	0.00280417
0.75	0.856008	0.854099	0.00190824
0.85	0.65599	0.655239	0.000750786
0.95	0.431433	0.431966	0.000532818
1.01	0.299952	0.301275	0.00132258
1.15	0.0601453	0.0624809	0.0023356
1.25	-0.00206994	-1.78135×10^{-6}	0.00206816

الجدول(4-6) المقارنة بين الحل التحليلي و الحل بطريقة **FEM** باستخدام عشرة عناصر

```
rr = Table[N1[x, e] k[[e]] + N2[x, e] k[[e + 1]], {e, 1, n}];
discreteplot[i_] := Plot[rr[[i]], {x, X[[i]], X[[i + 1]]}, DisplayFunction → Identity];
gg = Join[Table[discreteplot[i], {i, 1, n}]];
pp = Show[gg, DisplayFunction → Identity];
u = ListPlot[Table[{X[[s]], k[[s]]}, {s, 1, n + 1}], PlotStyle → PointSize[0.02],
   DisplayFunction → Identity];
v = Plot[e^(-π x) (0.013932 e^(2 π x) + e^(π x) Sin[π x]), {x, 0, X[[n + 1]]},
   PlotStyle → {Dashing[{0.02, 0.03}], Hue[0.3], Thickness[0.01]}, DisplayFunction → Identity];
l = Show[u, v, pp, DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesOrigin → {0, 0}]
```

- Graphics -

الشّكل(4-13) المقارنة بين الحل التحليلى والحل بطريقة **FEM** باستخدام عشرة عناصر بيانياً

نلاحظ لأنّ الحلّ الفعلي يبلغ نهايتين محلِّيَّتين عند كل من النقطتين: x=0.522891 و x=1.25037، ويُصادف نقطتي انعطاف x=0.00448747 و x= 0.919612 ويُلاحظ من جدول مقارنة الحلّ التحليلي بالحلّ العددي أن الخطأ يبلغ قيماً كبيرة نسبياً في جوار النهايات المحلّيّة ويتناقص بابتعاده عنها واقترابه من نقاط الانعطاف.

الفصل الخامس

حل معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية

في (2-D)

5−1. مقدمة:

تحدثنا في الفصل السابق عن استخدام طريقة العناصر المنتهية في إيجاد حل تقريبي لمعادلات ماكسويل في **(1-D)**، نقوم الآن وبخطواتٍ مماثلةٍ بمعالجة هذه المعادلات في **(2-D)**، إلا أنّ الأمر هنا يكون أكثر تعقيداً، ويُعتبر هذا الفصل ذو أهمية كبيرة لأنّه يعطينا نتائج جيدة للعديد من المسائل العملية في الكهرطيسية كتحليل الاستقطاب من النوعين $\mathbf{H_z}$, $\mathbf{E_z}$ في انتشار دليل موجي مباشر في مقطع عرضي وغيرها من المسائل الفيزيائية، إضافة إلى أنّه يمهِّد الطريق نحو حل معادلات ماكسويل في **(3-D)**.

انطلاقاً من معادلات ماكسويل في **(2-D)** يُمكن الحصول على معادلة الموجة:

$$\vec{\nabla}_t.\left(p(x,y)\vec{\nabla}_t U(x,y)\right) + k_0^2 q(x,y)U(x,y) = f(x,y) \qquad (1-5)...$$

حيث أنّ:

$$\vec{\nabla} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}}_{\vec{\nabla}_t} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla}_t + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{p(x)}$, $\boldsymbol{q(x)}$: دوال عددية معرّفة على المنطقة المدروسة.

$\boldsymbol{U(x)}$: يمثّل الحقل الكهربائي أو المغناطيسي أو قد يكون مقداراً كمونياً.

هذا وتختلف المسألة المدروسة تبعاً للدوال السابقة ونعرض فيما يلي بعضاً من هذه المسائل:

١) خطوط النقل (Transmission Lines):

معادلة الموجة:

$$\vec{\nabla}_t^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (2-5\ )...$$

مع العلم بأنّ:

$U(x,y) = V$ هي دالة الكمون

$f(x,y) = 0$ ، $p(x,y) = 1$ ، $q(x,y) = 0$ ، $k_0 = 0$.

٢) التشتت (التبعثر) في (2-D) (Two- Dimensional Scattering):

ونُميّز هنا حالتين:

١َ. حالة الاستقطاب ***Hz*** (***Hz*** **- polarization**):

تأخذ معادلة الموجة في هذه الحالة الشّكل التالي:

$$\vec{\nabla}_t \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\vec{\nabla}_t H_z\right) + k_0^2 \mu_r H_z = 0 \qquad (3-5)\ldots$$

حيث: $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = w\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\,, k = \frac{2\pi}{\lambda} = w\sqrt{\varepsilon\mu}$

نلاحظ بالمقارنة بين (1) و(3) أنّ:

$q(x,y) = \mu_r$ ،$p(x,y) = \frac{1}{\varepsilon_r}$ ،$f(x,y) = 0$ ، $U(x,y) = H_z$

٢َ. حالة الاستقطاب ***E*z** (***E*z** **- polarization**):

تأخذ معادلة الموجة في هذه الحالة الشّكل التالي:

$$\vec{\nabla}_t \cdot \left(\frac{1}{\mu_r}\vec{\nabla}_t E_z\right) + k_0^2 \varepsilon_r E_z = 0 \qquad (4-5)\ldots$$

أي: $q(x,y) = \varepsilon_r$ ،$p(x,y) = \frac{1}{\mu_r}$ ، $f(x,y) = 0$ ،$U(x,y) = E_z$.

٣) انتشار دليل موجي (Waveguide propagation) في مقطع متجانس:

تُكتب معادلة الموجة في هذه الحالة بأحد الشّكلين الشّعاعيين التاليين:

$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$ أو $\vec{\nabla}^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$

حيث أنّ: $\vec{\nabla}^2 \vec{H} = \nabla^2 H_x \vec{\imath} + \nabla^2 H_y \vec{\jmath} + \nabla^2 H_z \vec{k}$

ونعرض شكلها هنا أيضاً في حالتين:

١َ. حالة الاستقطاب ***H*z** :

ويمكن كتابة معادلة الموجة في هذه الحالة بالشكل السّلّمي التالي:

$$\vec{\nabla}_t^2 H_z + \gamma^2 H_z = 0$$

حيث أنّ: $\gamma^2 = k^2 - \beta^2$ (و γ هو عدد الموجة)

و $\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = -\beta^2 H_z$

وبالمقارنة مع المعادلة(5−1) نجد أنّ:

$U(x,y) = H_z$، $f(x,y) = 0$ ، $p(x,y) = 1$، $q(x,y) = 1$ ، $\gamma^2 = k_0^2$.

أو يُمكن أخذ المعادلة الشّعاعية التالية:

$$\vec{\nabla}_t \times \left(\frac{1}{\mu_r}\vec{\nabla}_t \times \overrightarrow{E_t}\right) - (k_0^2 \varepsilon_r - \beta^2)\overrightarrow{E_t} = 0 \qquad (5-5)\ldots$$

حيث: $\overrightarrow{E_t} = E_x \vec{\imath} + E_y \vec{\jmath}$.

٢َ. حالة الاستقطاب $\mathbf{E_z}$:

يُمكن وبشكل مماثل تماماً لحالة الاستقطاب- $\mathbf{H_z}$ أخذ المعادلة السّلّمية:

$$\vec{\nabla}_t^2 E_z + \gamma^2 E_z = 0$$

أو الشّعاعية:

$$\vec{\nabla}_t \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r}\vec{\nabla}_t \times \overrightarrow{H_t}\right) - (k_0^2\mu_r - \beta^2)\overrightarrow{H_t} = 0 \qquad ...(6-5)$$

حيث: $\overrightarrow{H_t} = H_x\vec{\imath} + H_y\vec{\jmath}$.

٤) **انتشار دليل موجي (Waveguide propagation) في مقطع غير متجانس:**

تُكتب معادلة الموجة في هذه الحالة على شكل زوج من المعادلات التفاضلية:

$$\vec{\nabla}_t \times \frac{1}{\mu_r}\vec{\nabla}_t \times \overrightarrow{E_t} - \frac{i\beta}{\mu_r}\left(\vec{\nabla}_t E_z + i\beta\overrightarrow{E_t}\right) - {k_0}^2\varepsilon_r\overrightarrow{E_t} = 0$$

$$\vec{\nabla}_t \times [\frac{1}{\mu_r}(\vec{\nabla}_t E_z + i\beta\overrightarrow{E_t}) \times \vec{k}] - {k_0}^2\varepsilon_r E_z\vec{k} = 0$$

حيث أنّ β هو ثابت انتشار الموجة.

ننتقل الآن لنعرض في هذا الفصل حلاً لمعادلات ماكسويل في **(2-D)** باستخدام نوعين من دوال القاعدة، هما دوال قاعدة العقد ودوال قاعدة الأضلاع.

5-2. حل معادلات ماكسويل في (2-D) باستخدام دوال قاعدة العقد:

قبل الخوض في تفاصيل خطوات حل معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية في الفضاءات ثنائية البعد، والتي هي إلى حد ما مشابهة لتلك المتّبعة في حالة **(1-D)** لابد من أن نوجد حد الباقي الناتج عن تبديل الحل التّقريبي المفروض $\widetilde{U} = \sum_{i=1}^{N_e} N_i U_i$ في المعادلة التفاضلية(5-1): [1]

$$R(x,y) = \nabla.\left(p(x,y)\,\nabla\widetilde{U}(x,y)\right) + k_0^2 q(x,y)\widetilde{U}(x,y) - f(x,y) \qquad ...(7-5)$$

حيث أنّ U_i قيمة الحقل أو الكمون $\boldsymbol{U}$ عند العقدة رقم $\boldsymbol{i}$.

نلاحظ أنّ شكل العلاقة(5-7) يتوافق مع شكل المسألة(2-46) وبالتالي فإنّ وحدانيّة الحل تتحقّق إذا فرضنا تحقق الشروط الواردة في الفقرة(2-2-7) نفسها.

نُوجد الآن الشّكل الضّعيف للمعادلة(5-7) ثمّ نناقش طريقة الحل تبعاً للشروط الحدّيّة المفروضة.

لكنّ الحدّ $R(x,y)$ يجب أن يكون معدوماً، وبالتالي يكون اعتماداً على طريقة الباقي الموزون:

$$\iint_\Omega W_m(x,y)R(x,y)dxdy = 0 \quad m = 1,2,\dots,N_e \qquad ...(8-5)$$

---

[1] نشير إلى أنّنا سوف نستخدم الرمز $\vec{\nabla}$ عوضاً عن رمز المؤثر $\vec{\nabla}_t$ الموجود في العلاقة(5-1) لتبسيط الكتابة.

بما أنّنا افترضنا أنّ العلاقة(5−8) محققة من أجل المنطقة Ω فإن هذا يقتضي تحققها من أجل أي منطقة جزئية Ω^e من Ω ومنه استناداً على طريقة كالاركين التي تكون فيها دوال الوزن هي دوال الشّكل المستخدمة في التّقريب (أي $W_m(x,y) = N_m(x,y)$) نجد أنّه يُمكن كتابة هذه العلاقة بالشّكل:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega^e} N_m(x,y)[\nabla.\left(p(x,y)\,\nabla\widetilde{U}^{(e)}(x,y)\right) + k_0^2 q(x,y)\widetilde{U}^{(e)}(x,y) - f(x,y)]d\Omega = 0$$

$$m = 1,2,\dots,N_e \qquad (9-5)\dots$$

ومنه:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \iint_{\Omega^e} \overrightarrow{N^{(e)}}[\nabla.\left(p(x,y)\,\nabla\widetilde{U}^{(e)}(x,y)\right) + k_0^2 q(x,y)\widetilde{U}^{(e)}(x,y) - f(x,y)]dxdy = 0$$

علماً أنّ N_e هو عدد العناصر المستخدمة في التجزئة، أمّا $\widetilde{U}^{(e)}(x,y)$ فهي القيمة التّقريبية للدالة **$U(x,y)$** على العنصر e أي:

$$\widetilde{U}^{(e)}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i^{(e)} U_i^{(e)} \qquad (10-5)\dots$$

أو بشكلٍ آخر:

$$\widetilde{U}^{(e)}(x,y) = (\overrightarrow{N^{(e)}})^T\overrightarrow{U^{(e)}} \qquad (11-5)\dots$$

حيث:

$$(\overrightarrow{N^{(e)}})^T = \{N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, N_3^{(e)}, \dots, N_n^{(e)}\}$$

و

$$(\overrightarrow{U^{(e)}})^T = \{U_1^{(e)}, U_2^{(e)}, U_3^{(e)}, \dots, U_n^{(e)}\}$$

إذ تشير n إلى عدد عقد العنصر e، بينما تُشير $N_i^{(e)}$ إلى دوال قاعدة عقد العنصر e.[1]

أمّا $U_i^{(e)}$ فهي قيمة الدّالة U عند العقدة i من العنصر e.

ننتقل الآن لشرح خطوات الحل بطريقة العناصر المنتهية في **(2-D)** والموضّحة بالمخطط(4−1).

5−2−1. إيجاد الشّكل الضّعيف (*weak form*) للمعادلة التفاضلية:

ويتمُّ إيجاده باتباع خطوتين أساسيتين هما:

الخطوة الأولى: نكامل الحد الأول من العلاقة (5−1) بالاستفادة من العلاقتين التاليتين **[15]**:

$$\overrightarrow{N^{(e)}}[\nabla.P^{(e)}\,\nabla\widetilde{U}^{(e)}] = \nabla.\left(P^{(e)}\overrightarrow{N^{(e)}}\,\nabla\widetilde{U}^{(e)}\right) - P^{(e)}\,\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}.\nabla\widetilde{U}^{(e)}$$

$$\iint_{\Omega^e} \nabla.\left(P^{(e)}\,\overrightarrow{N^{(e)}}\nabla\widetilde{U}^{(e)}\right)ds = \oint_{C^e} P^{(e)}\overrightarrow{N^{(e)}}\left(\nabla\widetilde{U}^{(e)}.\hat{n}\right)dl$$ [2]

وذلك بُغية خفض مرتبة المشتقات الموجودة في عبارة $R(x)$.

حيث أنّ: ds هو تفاضل سطح المنطقة المدروسة Ω^e.

C^e المحيط المغلق للسطح.

$\hat{n}^e$ شعاع واحدة الناظم الخارجي على المحيط C^e .

---

[1] نستخدم N_i من أجل دوال قاعدة العقد، في حين نستخدم الرمز $\overrightarrow{W_i}$ من أجل دوال قاعدة الأضلاع.

[2] سوف نكتب للتبسيط **U** بدلاً عن **U(x,y)**، وكذلك f بدلاً عن **$f(x,y)$** وهكذا.

وأخيراً: $\nabla\widetilde{U}^{(e)}.\hat{n}^{e}=\frac{\partial\widetilde{U}^{(e)}}{\partial n}$.

نحصل بعد المكاملة على:

$$\iint_{\Omega^e}\overrightarrow{N^{(e)}}[\nabla.P^{(e)}\,\nabla\widetilde{U}^{(e)}]dxdy=\iint_{\Omega^e}\left\{\nabla.\left(P^{(e)}\overrightarrow{N^{(e)}}\,\nabla\widetilde{U}^{(e)}\right)-P^{(e)}\,\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}.\nabla\widetilde{U}^{(e)}\right\}dxdy$$

$$(12\text{–}5)\ldots\qquad=\oint_{C^e}P^{(e)}\,\overrightarrow{N^{(e)}}(\nabla\widetilde{U}^{(e)}.\hat{n}^{e})dl-\iint_{\Omega^e}P^{(e)}\,\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}.\nabla\widetilde{U}^{(e)}dxdy$$

الخطوة الثانية:

نُبدّل العلاقة (5–12) في العلاقة (5–9) فنحصل على المعادلة التالية:

$$\sum_{e=1}^{N_e}[\iint_{\Omega^e}\left(-P^{(e)}\,\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}.\nabla\widetilde{U}^{(e)}+k_0^2q^{(e)}\,\overrightarrow{N^{(e)}}\widetilde{U}^{(e)}-\overrightarrow{N^{(e)}}f\right)dxdy+$$

$$(13\text{–}5)\ldots\qquad\oint_{C^e}P^{(e)}\overrightarrow{N^{(e)}}\left(\hat{n}^{e}.\nabla\widetilde{U}^{(e)}\right)dl]=0$$

وتُعرف هذه المعادلة باسم الشّكل الضّعيف لمعادلة الموجة في **(2-D)**، وتُعتبر هذه المرحلة اللبنة الأساسيّة في بناء الحل بطريقة العناصر المنتهية، كما ولها أهمية كبيرة لأنّها تعطينا شكلاً آخر لمعادلة الموجة إضافة إلى أنّها تزودنا أيضاً بمعلومات عن الشروط الحدية الواجب أن تحققها معادلة الموجة والضرورية في مسألة وحدانية الحل.

ننتقل الآن إلى عملية التجزئة ونميّز هنا حالتين:

تجزئة المنطقة إلى عناصر مثلثية الشّكل و تجزئة المنطقة إلى عناصر رباعية الأضلاع.

5–2–2. تجزئة المنطقة إلى عناصر مثلثية الشّكل:

وتتألف من ثلاث خطوات أساسيّة هي:

١. **الفصل:** وتتضمن هذه الخطوة تجزئة المنطقة المدروسة إلى مجموعة من المثلثات الصغيرة تدعى بالعناصر المثلثية كما في الشّكل(5–1)، وتُرقّم عقد كل مثلث ***e*** بالأرقام **1,2,3** ويأخذ المتغير عند هذه العقد القيم $U_1^{(e)},U_2^{(e)},U_3^{(e)}$.

كما تُستخدم إحداثيات المساحة للتعبير عن موضع أو قيمة المتغير عند كل نقطة من نقاط العنصر المثلثي كما رأينا في الفصل الثّالث بالشّكل:

$$y=\sum_{i=1}^{3}y_i^e\,\xi_i^{(e)}\ \text{،}\ x=\sum_{i=1}^{3}x_i^e\,\xi_i^{(e)}$$

حيث تُعطى $\xi^{(e)}$ كما ذكرنا بالعلاقات:

$$\overrightarrow{\xi^{(e)}} = \begin{Bmatrix} \xi_1^{(e)} \\ \xi_2^{(e)} \\ \xi_3^{(e)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A^e} \begin{bmatrix} (x_2y_3 - x_3y_2) & y_{23}^e & x_{32}^e \\ (x_3y_1 - x_1y_3) & y_{31}^e & x_{31}^e \\ (x_1y_2 - x_2y_1) & y_{12}^e & x_{21}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (14-5)...$$

حيث: $x_{nm}^e = x_n^e - x_m^e$ ، $y_{nm}^e = y_n^e - y_m^e$ ، $A^e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1^e & y_1^e \\ 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_1^e \end{vmatrix}$

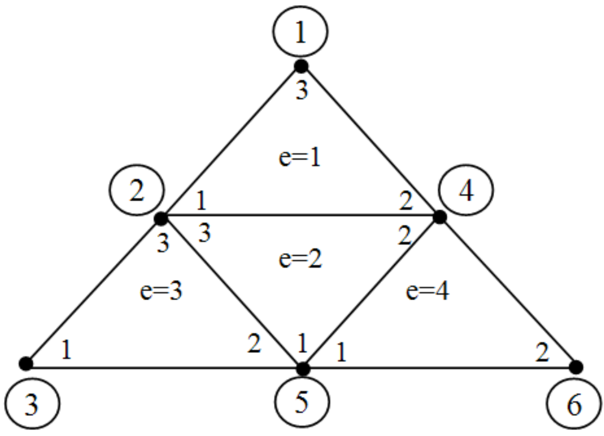
وبشكل آخر نكتب:

$$\xi_i^{(e)} = \frac{1}{2A^e}(a_i^e + b_i^e x + c_i^e y) \quad (15-5)...$$

وذلك من أجل:

$$a_i^e = x_j^e y_k^e - x_k^e y_j^e$$
$$b_i^e = y_{jk}^e$$
$$c_i^e = x_{kj}^e$$

ويتمُّ الحصول على المعادلات (5–14) الثلاث بتبديل دوري للأدلة ***(i,j,k)***.



الشّكل(5–1) منطقة مُجزّأة إلى عناصر مثلثية

الأرقام الموضعية والمعمّمة للعقد

٢. صيغة العنصر:

نُوجد في هذه المرحلة مصفوفة كل عنصر وذلك اعتماداً على جملة الإحداثيات الموضعية المنسوب إليها ويتمُّ ذلك وفق الآتي:

نختار من أجل كل عنصر ***e*** تمثيلاً خطياً للمتغير $U^{(e)}$ معرفاً وفق العلاقة:

$$\tilde{U}^{(e)}(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^{(e)} U_i^{(e)} = (\overrightarrow{\xi^{(e)}})^T \overrightarrow{U^{(e)}} \quad (16-5)...$$

حيث أنّ: $(\overrightarrow{U^{(e)}})^T = \{U_1^{(e)} \quad U_2^{(e)} \quad U_3^{(e)}\}$

و $U_1^{(e)}$ و $U_2^{(e)}$ و $U_3^{(e)}$ هي قيم متغير الحقل عند عقد العنصر رقم ***e***.

نُبدّل(5–16) في الشّكل الضّعيف لمعادلة الموجة(5–13) فنجد أنّ:

$$\sum_{e=1}^{N_e}\left\{\overrightarrow{U^{(e)}}\iint_{\Omega^e}\left[-P^{(e)}\,\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}.\left(\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T+k_0^2q^{(e)}\;\overrightarrow{\xi^{(e)}}\;\left(\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T\right]dxdy+\right.$$

$$(17\text{–}5)\ldots\qquad \left.\oint_{c^e}P^{(e)}\;\overrightarrow{\xi^{(e)}}\left(\hat{n}^e.\nabla\widetilde{U}^{(e)}\right)dl-\iint_{\Omega^e}\overrightarrow{\xi^{(e)}}\,f\,dxdy\right\}=0$$

حيث:
$$\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}=\begin{Bmatrix}\nabla\xi_1^{(e)}\\ \nabla\xi_2^{(e)}\\ \nabla\xi_3^{(e)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\xi_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial\xi_1^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial\xi_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial\xi_2^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial\xi_3^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial\xi_3^{(e)}}{\partial x}\end{bmatrix}=\frac{1}{2A^{(e)}}\begin{bmatrix}b_1^e & c_1^e\\ b_2^e & c_2^e\\ b_3^e & c_3^e\end{bmatrix}$$

ومنه:

$$\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}.\left(\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T=\frac{1}{\left(2A^{(e)}\right)^2}\begin{bmatrix}b_1^e & c_1^e\\ b_2^e & c_2^e\\ b_3^e & c_3^e\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}b_1^e & c_1^e\\ b_2^e & c_2^e\\ b_3^e & c_3^e\end{bmatrix}^T$$

$$=\frac{1}{(2A^{(e)})^2}\begin{bmatrix}(b_1^e)^2+(c_1^e)^2 & b_1^eb_2^e+c_1^ec_2^e & b_1^eb_3^e+c_1^ec_3^e\\ b_1^eb_2^e+c_1^ec_2^e & (b_2^e)^2+(c_2^e)^2 & b_2^eb_3^e+c_2^ec_3^e\\ b_1^eb_3^e+c_1^ec_3^e & b_2^eb_3^e+c_2^ec_3^e & (b_3^e)^2+(c_3^e)^2\end{bmatrix}$$

و
$$\overrightarrow{\xi^{(e)}}\left(\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T=\begin{bmatrix}(\xi_1^{(e)})^2 & \xi_1^{(e)}\xi_2^{(e)} & \xi_1^{(e)}\xi_3^{(e)}\\ \xi_2^{(e)}\xi_1^{(e)} & (\xi_2^{(e)})^2 & \xi_2^{(e)}\xi_3^{(e)}\\ \xi_3^{(e)}\xi_1^{(e)} & \xi_3^{(e)}\xi_2^{(e)} & (\xi_3^{(e)})^2\end{bmatrix}$$

وبما أنّ $\xi^{(e)}=0$ عند جميع العناصر عدا العنصر ***e*** فإنّ حذف المجموع على جميع العناصر في العلاقة(5–9) أمرٌ ممكن، وبالتالي يُمكن أن نكتب من أجل أي عنصر ***e*** :

$$\overrightarrow{U^{(e)}}\iint_{\Omega^e}\left[-P^{(e)}\,\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}.\left(\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T+k_0^2q^{(e)}\;\overrightarrow{\xi^{(e)}}\;\left(\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T\right]dxdy$$

$$+\oint_{c^e}P^{(e)}\;\overrightarrow{\xi^{(e)}}\left(\hat{n}^e.\nabla\widetilde{U}^{(e)}\right)dl\;=\iint_{\Omega^e}\overrightarrow{\xi^{(e)}}\,f\,dxdy$$

أو باختصار:

$$(18\text{–}5)\ldots\qquad A^{(e)}\overrightarrow{U^{(e)}}+\overrightarrow{EndPoints^{(e)}}=\overrightarrow{F^{(e)}}$$

ندعو جملة المعادلات الخطية(5–18) بالجملة المصفوفية للعنصر ***e***، في حين تدعى المصفوفة $A^{(e)}$ بمصفوفة العنصر ***e*** ويُمكن التعبير عنها بالشّكل:

$$(19\text{–}5)\ldots\qquad A^{(e)}=K_\Delta^{(e)}+k_0^2K^{(e)}$$

حيث أنّ:

$$(20\text{–}5)\ldots\qquad K_\Delta^{(e)}=-\iint_{\;e}P^{(e)}\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}.\left(\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T dxdy$$

$$(21\text{–}5)\ldots\qquad K^{(e)}=\iint_{\Omega^e}q^{(e)}\;\overrightarrow{\xi^{(e)}}\;\left(\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T dxdy$$

$$(22\text{–}5)\ldots\qquad \overrightarrow{F^{(e)}}=\iint_{\Omega^e}\overrightarrow{\xi^{(e)}}\,f\,dxdy$$

$$(23\text{–}5)\ldots\qquad \overrightarrow{EndPoints^{(e)}}=\oint_{c^e}P^{(e)}\;\overrightarrow{\xi^{(e)}}\left(\hat{n}^e.\nabla\widetilde{U}^{(e)}\right)dl$$

وانطلاقاً من كون العنصر **e** قد يملك أضلاعاً واقعة على محيط المنطقة المدروسة وقد لا يملك فإنه يُمكننا كتابة المتجه $\overrightarrow{EndPoints^{(e)}}$ على شكل مجموع متجهين:

$$\overrightarrow{EndPoints^{(e)}} = \overrightarrow{EndPoints_b^{(e)}} + \overrightarrow{EndPoints_i^{(e)}}$$

حيث: $\overrightarrow{EndPoints_b^{(e)}}$ ينتج عن تأثير قيمة المشتق على محيط المنطقة الخارجي، أمّا $\overrightarrow{EndPoints_i^{(e)}}$ فينتج عن تأثير قيمة المشتق على محيط العنصر المشترك مع العناصر المجاورة، وبما أنّه يتمُّ حساب التكاملات على المحيط باتجاه معاكس لعقارب الساعة، فإنّ تأثير المتجه $\overrightarrow{EndPoints_i^{(e)}}$ ينعدم عند تجميع معادلات العناصر، وبالتالي فإنّنا نكتفي بالمتجه $\overrightarrow{EndPoints_b^{(e)}}$. وهذا يعني أنّ الحد $\overrightarrow{EndPoints^{(e)}}$ لن يظهر إلا من أجل العناصر التي تملك أضلاعاً متوضعة على محيط المنطقة المدروسة، ويُمكن الاستغناء عنه في حالة العناصر الدّاخليّة أو الحالات التي يحقق فيها الحقل شروط نيومان الحدية حيث يكون: $\hat{n}^e.\nabla\tilde{U}^{(e)} = \frac{\partial\tilde{U}^{(e)}}{\partial n} = 0$ وبالتالي تأخذ المعادلة(5−18) حينها الشّكل التالي:

$$A^{(e)}\overrightarrow{U^{(e)}} = \overrightarrow{F^{(e)}} \qquad \text{(24-5)...}$$

حالة خاصة:

تُعطى عناصر المصفوفة $A^{(e)}$ والمتجه $\overrightarrow{F^{(e)}}$ من أجل ***p=p^e^, q=q^e^*** قيمتان عدديّتان ثابتتان للدّالتين ***p, q*** داخل العنصر ***e*** بالعلاقتين:

$$K_{\Delta}^{(e)} = -p^e \iint_{\Omega^e} \nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}.\left(\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T dxdy \qquad \text{(25-5)...}$$

$$K^{(e)} = q^e \iint_{\Omega^e} \overrightarrow{\xi^{(e)}} \left(\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T dxdy \qquad \text{(26-5)...}$$

لكن:

$$\iint_{\Omega^e} \nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}.\left(\nabla\overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T dxdy =$$

$$= \frac{1}{\left(2A^{(e)}\right)^2}\iint_{\Omega^e}\begin{bmatrix}(b_1^e)^2+(c_1^e)^2 & b_1^eb_2^e+c_1^ec_2^e & b_1^eb_3^e+c_1^ec_3^e\\ b_1^eb_2^e+c_1^ec_2^e & (b_2^e)^2+(c_2^e)^2 & b_2^eb_3^e+c_2^ec_3^e\\ b_1^eb_3^e+c_1^ec_3^e & b_2^eb_3^e+c_2^ec_3^e & (b_3^e)^2+(c_3^e)^2\end{bmatrix}dxdy$$

$$= \frac{1}{4(A^{(e)})^2}\begin{bmatrix}(b_1^e)^2+(c_1^e)^2 & b_1^eb_2^e+c_1^ec_2^e & b_1^eb_3^e+c_1^ec_3^e\\ b_1^eb_2^e+c_1^ec_2^e & (b_2^e)^2+(c_2^e)^2 & b_2^eb_3^e+c_2^ec_3^e\\ b_1^eb_3^e+c_1^ec_3^e & b_2^eb_3^e+c_2^ec_3^e & (b_3^e)^2+(c_3^e)^2\end{bmatrix}\iint_{\Omega^e} dxdy$$

$$= \frac{1}{4(A^{(e)})^2}\begin{bmatrix}(b_1^e)^2+(c_1^e)^2 & b_1^eb_2^e+c_1^ec_2^e & b_1^eb_3^e+c_1^ec_3^e\\ b_1^eb_2^e+c_1^ec_2^e & (b_2^e)^2+(c_2^e)^2 & b_2^eb_3^e+c_2^ec_3^e\\ b_1^eb_3^e+c_1^ec_3^e & b_2^eb_3^e+c_2^ec_3^e & (b_3^e)^2+(c_3^e)^2\end{bmatrix}A^{(e)}$$

$$\iint_{\Omega^e} \nabla \overrightarrow{\xi^{(e)}} . \left(\nabla \overrightarrow{\xi^{(e)}}\right)^T dxdy = \frac{1}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} \left(b_1^e\right)^2 + \left(c_1^e\right)^2 & b_1^e b_2^e + c_1^e c_2^e & b_1^e b_3^e + c_1^e c_3^e \\ b_1^e b_2^e + c_1^e c_2^e & \left(b_2^e\right)^2 + \left(c_2^e\right)^2 & b_2^e b_3^e + c_2^e c_3^e \\ b_1^e b_3^e + c_1^e c_3^e & b_2^e b_3^e + c_2^e c_3^e & \left(b_3^e\right)^2 + \left(c_3^e\right)^2 \end{bmatrix}$$

(27−5)...

كذلك:

(28−5)... $$\iint_{\Omega^e} \xi_i^e \xi_j^e \, dxdy = \frac{1!1!}{(1+1+2)!} 2A^{(e)} = \frac{A^{(e)}}{12}$$

بالتبديل في $K_\Delta^{(e)}$ و $K^{(e)}$ نجد أنّ:

(29−5)... $$K_\Delta^{(e)} = \frac{-p^e}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} (b_1^e)^2 + (c_1^e)^2 & b_1^e b_2^e + c_1^e c_2^e & b_1^e b_3^e + c_1^e c_3^e \\ b_1^e b_2^e + c_1^e c_2^e & (b_2^e)^2 + (c_2^e)^2 & b_2^e b_3^e + c_2^e c_3^e \\ b_1^e b_3^e + c_1^e c_3^e & b_2^e b_3^e + c_2^e c_3^e & (b_3^e)^2 + (c_3^e)^2 \end{bmatrix}$$

(30−5)... $$K^{(e)} = \frac{q^e A^{(e)}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

وأخيراً يُمكننا بالاستفادة من (5−29) و(5−30) كتابة عناصر المصفوفة $A^{(e)}$ بالشّكل:

$$A_{ij}^{(e)} = K_{\Delta_{ij}}^{(e)} + k_0^2 K_{ij}^{(e)}$$

(31−5)... $$= \frac{-p^e}{4A^{(e)}} \left(b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e\right) + k_0^2 q^e \frac{A^{(e)}}{12} (1 + \delta_{ij})$$

حيث:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

5−2−3. التجميع والحل:

تأتي عملية تجميع معادلات العناصر في المرحلة التي تلي مباشرة كتابة المصفوفات العنصرية لعناصر المجموعة، وتتم بأخذ مجموع مصفوفات العناصر أي:

(32−5)... $$\sum_{e=1}^{N_e} A^{(e)} \overrightarrow{U^{(e)}} = \sum_{e=1}^{N_e} \overrightarrow{F^{(e)}}$$

لكن بما أنّ أي عقدة يُمكن أن تكون عقدة مشتركة بين عنصرين أو أكثر، فإن هذا يُعطيها أرقاماً موضعية مختلفة فضلاً على رقمها المعمم، وبالمقابل يكون لقيمة متغير الحقل رموزاً مختلفة عند هذه العقدة على الرغم من أنّ له قيمة وحيدة عندها، من هنا ونظراً إلى أنّ الهدف الأساسي من عملية التجميع هو دمج معادلات جميع العناصر ضمن جملة مصفوفية واحدة تعتمد على ترميز وحيد كان لا بد من وضع جداول تُدوّن في بداية كل مسألة تتعين في أحدها فواصل عقد المنطقة المدروسة، كما ويربط الجدول الآخر بين الأرقام الموضعية والمعمّمة للعقد المرتبطة بالعنصر ***e***، يضاف إليهما جدولان آخران يعينان أرقام العقد المحيطية في المسألة والدّوال المرتبطة بخواص المادة، وفيما يلي شرح توضيحي لذلك:

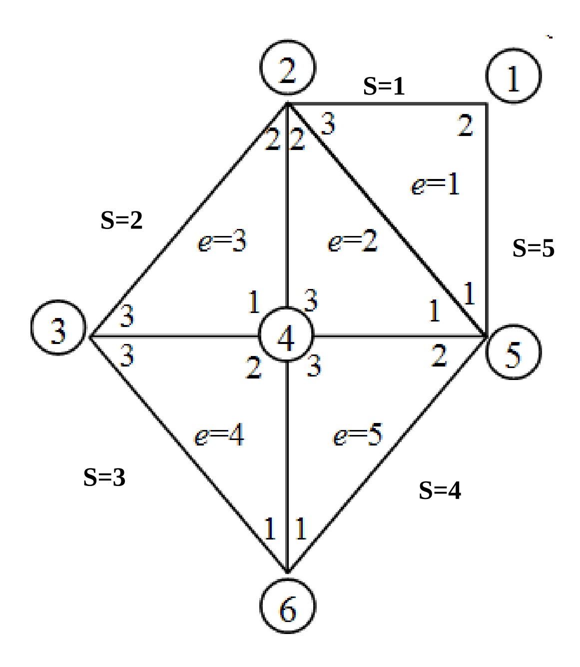
١ً. جدول توضع العقد:

يتألف هذا الجدول من ثلاثة أسطر:

يتضمّن السطر الأول الأرقام المعمّمة لجميع العقد (الداخلية والمحيطية).

بينما يحوي السطرين الثاني والثالث فواصل وتراتيب تلك العقد في جملة الإحداثيات المعمّمة. فمن أجل الشّكل(5−2) يكون:

الأرقام المعمّمة للعقد	1	2	3	4	5	6
فواصل العقد x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
تراتيب العقد y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6



الشّكل(5−2) الأرقام المعمّمة للعقد والأضلاع

٢ً. جدول الروابط المثلثية:

ويتمُّ في هذا الجدول تحديد أرقام العقد المعمّمة المقابلة لأرقامها الموضعية، لذا نلاحظ في هذا الجدول أربعة أسطر:

نكتب في السطر الأول الأرقام المعمّمة للعناصر مرتبة من **1** حتى N_e (حيث N_e عدد العناصر).

تتضمن الأسطر الثلاث الأخرى قيم الدّالة $n(i,e)$ التي تعطي الرقم المعمم المقابل للرقم الموضعي i للعقد في العنصر e.

رقم العنصر ← الرقم الموضعي للعقدة في العنصر

فمثلاً يكون من أجل الشّكل(5−2):

أرقام العناصر	1	2	3	4	5
n (1,e)	5	5	4	6	6
n (2,e)	1	2	2	4	5
n (3,e)	2	4	3	3	4

٣ً. جدول العقد المحيطية:

نحتاج عند تطبيق الشروط الحدية إلى معرفة الأضلاع والعقد المحيطية، لذا نُحدّد هذه الأضلاع والعقد في بداية المسألة في جدول يحجز فيه السطر الأول لكتابة أرقام الأضلاع الخارجية أمّا السطرين الثاني والثالث فيُخصصان لقيم الدّالة $n_s(i,s)$ التي تُعطي أرقاماً معممة للعقدتين اللتين تحدّدان الضلع **s** .

رقم الضلع ← i ، s ← رقم العقدة التي تحدد الضلعs وتأخذ القيم **1,2**

فمن أجل الشّكل(5−2) يكون:

أرقام الأضلاع	1	2	3	4	5
n_s (1,e)	1	2	3	6	5
n_s (2,e)	2	3	6	5	1

٤ً. جدول خواص المادة:

إذا كانت المنطقة المدروسة مؤلفة من مواد لها خواص مختلفة، عندئذ ننشئ جدولاً يربط بين العنصر وخواص المادة المرافقة له (ε_r, μ_r)، أمّا إن كانت المادة متجانسة عندئذٍ لا داعي لتحديد معاملات المادة من أجل كل عنصر.

الآن وبعد أن أوضحنا كيفية إنشاء الجداول السابقة نقوم بشرح آليّة تجميع المصفوفات كما يلي:

5−2−3−1. التعميم:

ونقصد بهذه الإجرائية كتابة مصفوفات العناصر بدلالة قيمة متغير الحقل عند جميع العقد، ولتوضيح هذه الخطوة نأخذ المنطقة الموضحة بالشّكل(5−2) ونفترض أنّها تحقق شرط نيومان الحدي.

نلاحظ في هذا الشّكل أنّ: $U_1^1 = U_1^2 = U_2^5 = U_5$ ، $U_2^3 = U_2^2 = U_3^1 = U_2$ وهكذا...

وبالتالي يُمكن أن نكتب مصفوفات العناصر بالشّكل الموسّع التالي:

رقم العنصر	مصفوفة العنصر	المصفوفة الموسعة للعنصر
1	$\begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & A_{13}^{(1)} \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} & A_{23}^{(1)} \\ A_{31}^{(1)} & A_{32}^{(1)} & A_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_{22}^{(1)} & A_{23}^{(1)} & 0 & 0 & A_{21}^{(1)} & 0 \\ A_{32}^{(1)} & A_{33}^{(1)} & 0 & 0 & A_{31}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12}^{(1)} & A_{13}^{(1)} & 0 & 0 & A_{11}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ F_1^{(1)} \\ 0 \end{Bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} A_{11}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & A_{13}^{(2)} \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} & A_{23}^{(2)} \\ A_{31}^{(2)} & A_{32}^{(2)} & A_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_2 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{(2)} & 0 & A_{32}^{(2)} & A_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{23}^{(2)} & 0 & A_{33}^{(2)} & A_{13}^{(2)} & 0 \\ 0 & A_{21}^{(2)} & 0 & A_{31}^{(2)} & A_{11}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(2)} \\ 0 \\ F_3^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} A_{11}^{(3)} & A_{12}^{(3)} & A_{13}^{(3)} \\ A_{21}^{(3)} & A_{22}^{(3)} & A_{23}^{(3)} \\ A_{31}^{(3)} & A_{32}^{(3)} & A_{33}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \\ F_3^{(3)} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{(3)} & A_{23}^{(3)} & A_{21}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{32}^{(3)} & A_{33}^{(3)} & A_{31}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^{(3)} & A_{13}^{(3)} & A_{11}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(3)} \\ F_3^{(3)} \\ F_1^{(3)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} A_{11}^{(4)} & A_{12}^{(4)} & A_{13}^{(4)} \\ A_{21}^{(4)} & A_{22}^{(4)} & A_{23}^{(4)} \\ A_{31}^{(4)} & A_{32}^{(4)} & A_{33}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_6 \\ U_4 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(4)} \\ F_2^{(4)} \\ F_3^{(4)} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33}^{(4)} & A_{32}^{(4)} & 0 & A_{31}^{(4)} \\ 0 & 0 & A_{23}^{(4)} & A_{22}^{(4)} & 0 & A_{21}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{13}^{(4)} & A_{12}^{(4)} & 0 & A_{11}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3^{(4)} \\ F_2^{(4)} \\ 0 \\ F_1^{(4)} \end{Bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} A_{11}^{(5)} & A_{12}^{(5)} & A_{13}^{(5)} \\ A_{21}^{(5)} & A_{22}^{(5)} & A_{23}^{(5)} \\ A_{31}^{(5)} & A_{32}^{(5)} & A_{33}^{(5)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_6 \\ U_5 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(5)} \\ F_2^{(5)} \\ F_3^{(5)} \end{Bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{33}^{(5)} & A_{32}^{(5)} & A_{31}^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & A_{23}^{(5)} & A_{22}^{(5)} & A_{21}^{(5)} \\ 0 & 0 & 0 & A_{13}^{(5)} & A_{12}^{(5)} & A_{11}^{(5)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_3^{(5)} \\ F_2^{(5)} \\ F_1^{(5)} \end{Bmatrix}$

5-2-3-2. تجميع معادلات العناصر:

الآن وبعد أن قمنا بكتابة معادلات العناصر بشكلها الموسّع يُمكننا تجميع هذه المعادلات بالنسبة للمجاهيل $U_i \;\; i=1,2,\ldots,n$ (حيث أنّ n هو عدد عقد المنطقة)، ويُمكن إنجاز ذلك ببساطة من خلال جمع مصفوفات العناصر التي حصلنا عليها في الخطوة السابقة، فنحصل نتيجة لذلك على جملة واحدة من المعادلات الخطية بالمجاهيل U_i ، ففي مثالنا السابق نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{bmatrix} A_{22}^{(1)} & A_{23}^{(1)} & 0 & 0 & A_{21}^{(1)} & 0 \\ A_{32}^{(1)} & A_{33}^{(1)}+A_{22}^{(2)}+A_{22}^{(3)} & A_{23}^{(3)} & A_{32}^{(2)}+A_{21}^{(3)} & A_{31}^{(1)}+A_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & A_{32}^{(3)} & A_{33}^{(3)}+A_{33}^{(4)} & A_{31}^{(3)}+A_{32}^{(4)} & 0 & A_{31}^{(4)} \\ 0 & A_{23}^{(2)}+A_{12}^{(3)} & A_{13}^{(3)}+A_{23}^{(4)} & A_{33}^{(2)}+A_{11}^{(3)}+A_{22}^{(4)}+A_{33}^{(5)} & A_{13}^{(2)}+A_{32}^{(5)} & A_{21}^{(4)}+A_{31}^{(5)} \\ A_{12}^{(1)} & A_{13}^{(1)}+A_{21}^{(2)} & 0 & A_{31}^{(2)}+A_{22}^{(5)} & A_{11}^{(1)}+A_{11}^{(2)}+A_{22}^{(5)} & A_{21}^{(5)} \\ 0 & 0 & A_{13}^{(4)} & A_{12}^{(4)}+A_{13}^{(5)} & A_{12}^{(5)} & A_{11}^{(4)}+A_{11}^{(5)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)}+F_2^{(2)}+F_2^{(3)} \\ F_3^{(3)}+F_3^{(4)} \\ F_3^{(2)}+F_1^{(3)}+F_2^{(4)}+F_3^{(5)} \\ F_1^{(1)}+F_1^{(2)}+F_2^{(5)} \\ F_1^{(4)}+F_1^{(5)} \end{Bmatrix} \quad (33-5)...$$

ملاحظة (5-1):

لو أضفنا إلى الجمل المدروسة عناصر جديدة فإنّ هذا لن يؤّثر على المعادلة الرّابعة من الجملة السابقة والتي تمَّ تجميعها بالنسبة إلى **U_4**، أي أنّ هذه المعادلة ستبقى نفسها (أي لن تحوي أكثر من خمس قيم للحقل عند العقد) حتى وإن احتوت المجموعة المدروسة على آلاف العناصر الجديدة المجاورة للعناصر السابقة (الشّكل(5-3))، وهذا ينطبق على جميع العقد إذ أنّ كل عقدة تتأثّر بمجموعة محدّدة من العقد المجاورة وتُؤثّر بها لذا فعند تجميع معادلات جميع العناصر بالنسبة لقيمة الحقل عند هذه العقدة سيكون عدد المجاهيل في المعادلة الناتجة محدوداً، من هنا نستنتج أنّ المصفوفة التي ستنتج لدينا ستكون متناثرة (**Sparse**) (تحوي عدداً كبيراً من المداخل الصفرية)، بل وأكثر من ذلك ستكون هذه المصفوفة شريطية (أي أنّ الحدود غير الصفرية فيها تكون متوضعة في شريط)، ويتحكم في عرض شريط المصفوفة الناتجة طريقة ترقيم العناصر، فعندما نعتمد ترقيماً تُعطى فيه العناصر المتجاورة أرقاماً متتالية كي نستطيع من خلال هذا الترقيم تصغير عرض الشريط في هذه المصفوفة.

الشّكل(5-3) عناصر إضافية على الشّكل(5-2)

5-2-3-3-3. تطبيق الشروط الحدية:

<u>أولاً:</u> شروط نيومان الحدية:

وتُوافق هذه الشروط حالة الاستقطاب $\mathbf{H_z}$ حيث يكون:

$\mathbf{U= H_z}$ و $\hat{n}.\nabla Hz = \frac{\partial Hz}{\partial n} = 0$ عند النقاط المتوضّعة على محيط المنطقة المدروسة.

وعندئذ يكون حد التكامل على المحيط معدوماً أي: $\overrightarrow{EndPoints^{(e)}} = 0$ أياً كانت $\boldsymbol{e}$.

وبالتالي تؤول المسألة المدروسة إلى إيجاد حل لجملة معادلات خطية من الشّكل:

$$A\,\overrightarrow{\mathrm{H_z}} = \vec{F} \quad \ldots(34\text{-}5)$$

فمن أجل مسألة خط النقل حيث ($\boldsymbol{k_0}$**=0,** $\vec{F} = 0$) تصبح المعادلات الخطية(34-5) بالشّكل:

$$K_\Delta \overrightarrow{\mathrm{H_z}} = 0$$

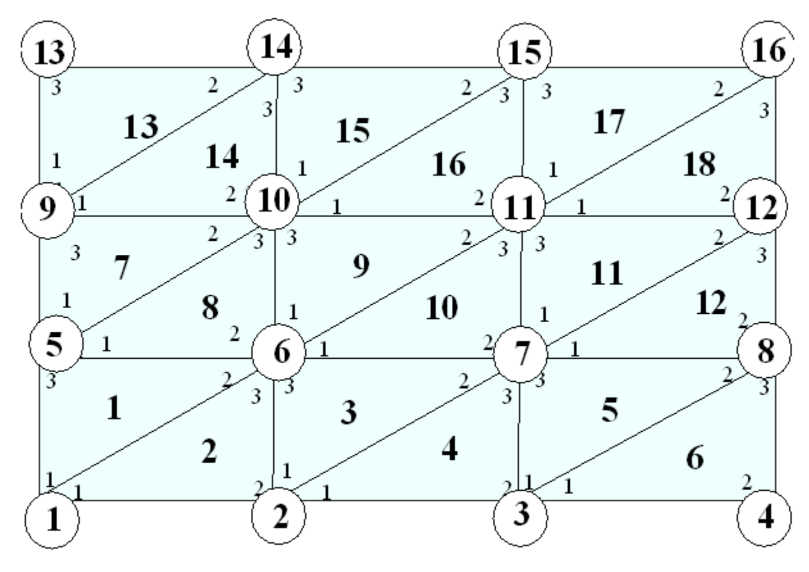
أمّا في مسألة المقطع العرضي لدليل موجي نجد أنّ الدراسة تنتهي إلى حل مسألة القيم الذاتيّة:

$$-K_\Delta\,\overrightarrow{\mathrm{H_z}} = \gamma^2 K\,\overrightarrow{\mathrm{H_z}}$$

حيث أنّ γ^2 هي القيم الذاتيّة، وγ أعداد موجة المقطع العرضي.

مسألة (5-1):

لنأخذ مقطعاً عرضياً لدليل موجي تكون فيه ($p = 1, q = 1$) ومكون من ثمانية عشر عنصراً كما في الشّكل(5-4)، ويحقق الشرط الحدي التالي: $\hat{n}.\nabla Hz = \frac{\partial Hz}{\partial n} = 0$ عند العقد المحيطية، أوجد قيمة $\boldsymbol{H_z}$ عند عقد هذه المنطقة.



الشّكل(5-4) تجزئة المستطيل ذي الأبعاد **(1.5×0.75)** إلى **(18)** عنصراً

الحل: يُمكننا من الشّكل(5−4) استنتاج الجدولين التاليين:

رقم العنصر	الأرقام الموضعية للعقد		
	$n(1,e)$	$n(2,e)$	$n(3,e)$
1	1	6	5
2	1	2	6
3	2	7	6
4	2	3	7
5	3	8	7
6	3	4	8
7	5	10	9
8	5	6	10
9	6	11	10
10	6	7	11
11	7	12	11
12	7	8	12
13	9	14	13
14	9	10	14
15	10	15	14
16	10	11	15
17	11	16	15
18	11	12	16

رقم العقدة	فاصلة العقدة	ترتيب العقدة
1	0	0
2	0.5	0
3	1	0
4	1.5	0
5	0	0.25
6	0.5	0.25
7	1	0.25
8	1.5	0.25
9	0	0.5
10	0.5	0.5
11	1	0.5
12	1.5	0.5
13	0	0.75
14	0.5	0.75
15	1	0.75
16	1.5	0.75

وبالتالي عند برمجة هذه الطريقة نحتاج أولاً إلى إدخال المعطيات ويتمُّ ذلك بالشّكل:

عدد العقد والعناصر

```
n = 18; m = 16;
X = {0, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1, 1.5};
Y = {0, 0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75};
NOfLocalNode[1] = {1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 9, 9, 10, 10, 11, 11};
NOfLocalNode[2] = {6, 2, 7, 3, 8, 4, 10, 6, 11, 7, 12, 8, 14, 10, 15, 11, 16, 12};
NOfLocalNode[3] = {5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 16};
NOfenterNode = {6, 7, 10, 11};
p[e_] := 1;
q[e_] := 1;
```

```
Do[Do[k[i_, e_] := NOfLocalNode[i][[e]], {i, 3}], {e, n}]
```

```
Do[Do[x[i_, e_] := X[[k[i, e]]], {e, n}], {i, 3}];
Do[Do[y[i_, e_] := Y[[k[i, e]]], {e, n}], {i, 3}];
A[e_] := 0.5 Det[{{1, x[1, e], y[1, e]}, {1, x[2, e], y[2, e]}, {1, x[3, e], y[3, e]}}]
```

مساحة العنصر

إحداثيات المساحة

```
ξ[1, e_] := Expand[0.5 * Det[{{1, 1, 1}, {x, x[2, e], x[3, e]}, {y, y[2, e], y[3, e]}}]] / Δ[e];
ξ[2, e_] := Expand[0.5 * Det[{{1, 1, 1}, {x[1, e], x, x[3, e]}, {y[1, e], y, y[3, e]}}]] / Δ[e];
ξ[3, e_] := Expand[0.5 * Det[{{1, 1, 1}, {x[1, e], x[2, e], x}, {y[1, e], y[2, e], y}}]] / Δ[e];
```

```
Do[Do[b[i_, e_] := Coefficient[ξ[i, e], x], {e, n}], {i, 3}];
Do[Do[c[i_, e_] := Coefficient[ξ[i, e], y], {e, n}], {i, 3}];
Do[Do[a[i_, e_] := First[ξ[i, e]], {e, n}], {i, 3}];
```

```
Emin = Table[0, {3}, {3}]; Ain = Table[0, {m}, {m}];

elementmatrix1[e_, Emin_] := Module[{EM = Emin, i, j}, Do[Do[EM[[i, j]] =
   - p[e]/(4 Δ[e]) (b[i, e] * b[j, e] + c[i, e] * c[j, e]), {i, 3}], {j, 3}]; Return[EM]]
elementmatrix2[e_, Emin_] := Module[{EM = Emin, i, j}, Do[Do[EM[[i, j]] =
   q[e] Δ[e]/12 (1 + KroneckerDelta[i, j]), {i, 3}], {j, 3}]; Return[EM]]
```

```
Do[em1[i] = elementmatrix1[i, Emin], {i, n}]; em1[1] // MatrixForm
Do[em2[i] = elementmatrix2[i, Emin], {i, n}];
em2[2] // MatrixForm
```

//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -64. & 0. & 64. \\ 0. & -16. & 16. \\ 64. & 16. & -80. \end{pmatrix}$$

المصفوفة $K_{\Delta}^{(1)}$

//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.0104167 & 0.00520833 & 0.00520833 \\ 0.00520833 & 0.0104167 & 0.00520833 \\ 0.00520833 & 0.00520833 & 0.0104167 \end{pmatrix}$$

المصفوفة $K^{(1)}$

```
Mergeelementmatrix[EM_, eftab_, Ain_] := Module[{i, j, ii, jj, A = Ain, L = Length[eftab]},
   For[i = 1, i ≤ L, i++, ii = eftab[[i]];
    For[j = 1, j ≤ L, j++, jj = eftab[[j]]; A[[jj, ii]] = A[[ii, jj]] = EM[[i, j]]]];
   Return[A]];
```

```
Do[MM1[e_] := Mergeelementmatrix[em1[e], {k[1, e], k[2, e], k[3, e]}, Ain], {e, 1, n}];
MM1[1] // MatrixForm
```

//MatrixForm=

$$
\begin{pmatrix}
-64. & 0 & 0 & 0 & 64. & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
64. & 0 & 0 & 0 & -80. & 16. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0. & 0 & 0 & 0 & 16. & -16. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

```
Do[MM2[e_] := Mergeelementmatrix[em2[e], {k[1, e], k[2, e], k[3, e]}, Ain], {e, 1, n}];
MM2[1] // MatrixForm
```

//MatrixForm=

$$
\begin{pmatrix}
0.0104167 & 0 & 0 & 0 & 0.00520833 & 0.00520833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.00520833 & 0 & 0 & 0 & 0.0104167 & 0.00520833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.00520833 & 0 & 0 & 0 & 0.00520833 & 0.0104167 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$ss1 = \sum_{i=1}^{n} MM1[i]$; Print[MatrixForm[ss1]]

-80.	16.	0	0	64.	0.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16.	-160.	16.	0	0	128.	0.	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	16.	-160.	16.	0	0	128.	0.	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	16.	-80.	0	0	0	64.	0	0	0	0	0	0	0	0
64.	0	0	0	-160.	32.	0	0	64.	0.	0	0	0	0	0	0
0.	128.	0	0	32.	-320.	32.	0	0	128.	0.	0	0	0	0	0
0	0.	128.	0	0	32.	-320.	32.	0	0	128.	0.	0	0	0	0
0	0	0.	64.	0	0	32.	-160.	0	0	0	64.	0	0	0	0
0	0	0	0	64.	0	0	0	-160.	32.	0	0	64.	0.	0	0
0	0	0	0	0.	128.	0	0	32.	-320.	32.	0	0	128.	0.	0
0	0	0	0	0	0.	128.	0	0	32.	-320.	32.	0	0	128.	0.
0	0	0	0	0	0	0.	64.	0	0	32.	-160.	0	0	0	64.
0	0	0	0	0	0	0	0	64.	0	0	0	-80.	16.	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.	128.	0	0	16.	-160.	16.	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.	128.	0	0	16.	-160.	16.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.	64.	0	0	16.	-80.

$ss2 = \sum_{i=1}^{n} MM2[i]$; Print[MatrixForm[ss2]]

0.0208333	0.00520833	0	0	0.00520833	0.0104167	0	0
0.00520833	0.03125	0.00520833	0	0	0.0104167	0.0104167	0
0	0.00520833	0.03125	0.00520833	0	0	0.0104167	0.0104167
0	0	0.00520833	0.0104167	0	0	0	0.00520833
0.00520833	0	0	0	0.03125	0.0104167	0	0
0.0104167	0.0104167	0	0	0.0104167	0.0625	0.0104167	0
0	0.0104167	0.0104167	0	0	0.0104167	0.0625	0.0104167
0	0	0.0104167	0.00520833	0	0	0.0104167	0.03125
0	0	0	0	0.00520833	0	0	0
0	0	0	0	0.0104167	0.0104167	0	0
0	0	0	0	0	0.0104167	0.0104167	0
0	0	0	0	0	0	0.0104167	0.00520833
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	[illegible]
0	0	0	0	0	0	[illegible]	[illegible]

المصفوفة $K^{(1)}$ الموسعة

0	0	0	0	0	0	[illegible]	[illegible]
0	0	0	0	0	0	[illegible]	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0.00520833	0.0104167	0	0	0	0	0	0
0	0.0104167	0.0104167	0	0	0	0	0
0	0	0.0104167	0.0104167	0	0	0	0
0	0	0	0.00520833	0	0	0	0
0.03125	0.0104167	0	0	0.00520833	0.0104167	0	0
0.0104167	0.0625	0.0104167	0	0	0.0104167	0.0104167	0
0	0.0104167	0.0625	0.0104167	0	0	0.0104167	0.0104167
0	0	0.0104167	0.03125	0	0	0	0.00520833
0.00520833	0	0	0	0.0104167	0.00520833	0	0
0.0104167	0.0104167	0	0	0.00520833	0.03125	0.00520833	0
0	0.0104167	0.0104167	0	0	0.00520833	0.03125	0.00520833
0	0	0.0104167	0.00520833	0	0	0.00520833	0.0208333

جدول مقارنة بين القيم التحليلية للحقل والقيم المحسوبة
بطريقة العناصر المنتهية

```
Hz = Eigenvectors[{ss1, ss2}][[1]];
as[x_, y_] := Cos[2 π x / 1.5] Cos[2 π y / 0.75]
rr = Table[as[X[[i]], Y[[i]]], {i, 16}];
error = Table[Abs[rr[[i]] - Hz[[i]]], {i, 1, 16}];
Print[Transpose[{Join[{"node"}, Table[i, {i, 16}]], Join[{"E^FEM"}, Hz], Join[{"E^exact"}, rr],
    Join[{"Error=|E^FEM-E^exact|"}, error]}] // TableForm]
```

H_z قيم الحقل عند العقد

as[x,y] الحل التحليلي

node	E^{FEM}	E^{exact}	Error=$\|E^{FEM}-E^{exact}\|$
1	0.0429355	1	0.957065
2	0.0618795	-0.5	0.56188
3	-0.214371	-0.5	0.285629
4	0.557208	1.	0.442792
5	0.0603171	-0.5	0.560317
6	-0.154146	0.25	0.404146
7	0.218363	0.25	0.0316371
8	-0.250619	-0.5	0.249381
9	-0.250619	-0.5	0.249381
10	0.218363	0.25	0.0316371
11	-0.154146	0.25	0.404146
12	0.0603171	-0.5	0.560317
13	0.557208	1.	0.442792
14	-0.214371	-0.5	0.285629
15	0.0618795	-0.5	0.56188
16	0.0429355	1.	0.957065

نلاحظ من الجدول السابق أنّ قيم الخطأ متناظرة بالنسبة إلى الخط الفاصل بين العقدتين الثامنة والتاسعة، ويعود ذلك إلى أن كلاً من الحلين التحليلي والعددي يأخذان قيماً متناظرة بالنسبة إلى الخط نفسه، وأنّ أصغر قيمة للخطا نشاهدها عند العقدتين السابعة والعاشرة الواقعتين في منتصف المنطقة المدروسة، في حين يبلغ الخطأ أكبر قيمة له عند العقدتين الأولى والأخيرة، واللتين تمثلان كما نعلم رأسان من رؤوس المنطقة المدروسة.

ثانياً: شروط دير خليه الحدية:

وتُوافق هذه الشروط أنماط الاستقطاب E_z− حيث يكون: $U= E_z$ و $E_z=0$ على المحيط أمّا المشتق النّاظمي: $\frac{\partial Uz}{\partial n} = \hat{n}.\vec{\nabla}Ez = \frac{\partial Ez}{\partial n}$ فلا يكون معدوماً على المحيط .

لذا فإننا نتعامل مع قيم $\psi = \frac{\partial Ez}{\partial n}$ عند العقد المحيطية على أنّها متغيرات جديد تُضاف إلى متغيرات المسألة، ونُعبّر عن القيمة التّقريبية لهذه الدّالة عند الضلع **s** بالعلاقة:

$$\tilde{\psi}^{(s)} = (\overrightarrow{N^{(s)}})^T \overrightarrow{\psi^{(s)}} \quad ...(35-5)$$

$$(\overrightarrow{\psi^{(s)}})^T = \{\psi_1^{(s)}, \psi_2^{(s)}\} \text{ و } (\overrightarrow{N^{(s)}})^T = \{N_1^{(s)}, N_2^{(s)}\}$$

حيث أنّ $N_i^{(s)}$ دالة الشّكل عند العقدة رقم i من الضلع **s** ، و $\psi_i^{(s)}$ هي قيمة الدّالة ψ عند العقدة i من الضلع **s**.

وفي حالة خاصة عندما يكون أحد المتغيرين x أو y ثابتاً (كما في الشّكل (5−4)) فإن دوال الشّكل في **(2-D)** تكون نفسها دوال الشّكل في **(1-D)** أي:

$$N_1^{(s)}(x,y) = \begin{cases} \frac{x_2^s - x}{x_2^s - x_1^s} & where\ y = const \\ \frac{y_2^s - y}{y_2^s - y_1^s} & where\ x = const \\ 0 & outside\ the\ sth\ segment \end{cases} \quad ...(36-5)$$

و

$$N_2^{(s)}(x,y) = 1 - N_1^{(s)}(x,y)$$

والآن نحصل على المعادلات من أجل الاستقطاب E_z بتبديل (5−35) و(5−16) في المعادلة (5−18) حيث نجد أنّ معادلة العنصر تصبح بالشّكل:

$$A^{(e)}\overrightarrow{U^{(e)}} + B^{(s)}\overrightarrow{\psi^{(s)}} = \overrightarrow{F^{(e)}} \quad ...(37-5)$$

حيث تُعطى المصفوفتان $A^{(e)}$ و$F^{(e)}$ بالعلاقات (5−19)−(5−22)، أما المصفوفة $B^{(s)}$ فهي:

$$B^{(s)} = P^e \oint_{c_s^e} \overrightarrow{\xi^{(e)}}(\overrightarrow{N^{(s)}})^T dl \quad ...(38-5)$$

أي:

$$B^{(s)} = \begin{bmatrix} \xi_1 N_1 & \xi_1 N_2 \\ \xi_2 N_1 & \xi_2 N_2 \\ \xi_3 N_1 & \xi_3 N_2 \end{bmatrix}$$

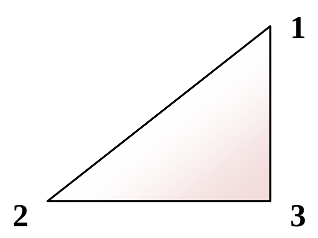
وبما أنَّ أي ضلع **s** من المحيط ما هي إلا ضلع من العنصر e، فإنّه يُمكن كتابة المصفوفة (5−38) بالشّكل:

$$B^{(s)} = P^e \oint_{c_s^e} \overrightarrow{N^{(s)}}(\overrightarrow{N^{(s)}})^T dl \quad ...(39-5)$$

فإذا كان المحيط مستطيلاً كان: $dl = dx$ أو $dl = dy$.

ويُمكن توضيح سبب كتابة $\xi^{(s)}$ بالشّكل(5−38) من خلال ما يلي:

ليكن لدينا المثلث التالي الشّكل(5−5)، ولنبرهن أنّ $\xi_i|_{edge\,(s)} = N_i$:



الشّكل(5−5) عنصر مثلثي ضلعاه موازيان للمحاور الإحداثية

لنثبت أنّ: $\xi_i|_{edge\,(1-3)} = N_i \;\; ; i = 1,3$

- $\xi_1|_{edge\,(1-3)} = \frac{(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y}{(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x_1+(x_3-x_2)y_1}$

لكن: $x = x_1 = x_3$ ومنه:

- $\xi_1|_{edge\,(1-3)} = \frac{(x_2-x_3)y_2-(x_2-x_3)y}{(x_2-x_3)y_2-(x_2-x_3)y_1} = \frac{y_3-y}{y_3-y_1} = N_1(y)$

- $\xi_2|_{edge\,(1-3)} = 0$
- $\xi_3|_{edge\,(1-3)} = \frac{(x_1y_2-x_2y_1)+(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y}{(x_1y_2-x_2y_1)+(y_1-y_2)x_3+(x_2-x_1)y_3}$

لكن: $x = x_1 = x_3$ ومنه:

$$\xi_3|_{edge\,(1-3)} = \frac{x_1y_2-x_2y_1+y_1x_1-y_2x_1+(x_2-x_1)y}{x_1y_2-x_2y_1+y_1x_1-y_2x_1+(x_2-x_1)y_3} = \frac{-(x_2-x_1)y_1+(x_2-x_1)y}{-(x_2-x_1)y_1+(x_2-x_1)y_3} = \frac{y-y_1}{y_3-y_1} = N_3(y)$$

وبالمثل من أجل جميع الأضلاع.

ملاحظة (5−2):

إنّ المصفوفة $B^{(s)}$ لا تظهر إلا عندما يحوي العنصر ***e*** عقدتين على الأقل على محيط المنطقة المدروسة، وفيما عدا ذلك تنعدم هذه المصفوفة.

وأخيراً بتجميع معادلات جميع العناصر نحصل على جملة المعادلات الخطية التالية:

$$A\vec{U} + B\vec{\psi} = \vec{F} \qquad ...(40-5)$$

فمن أجل الشّكل(5−4) نجد أنّه يمكن تمثيلها بجملة المعادلات التالية:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1.16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2.16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{n.16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{16.1} & A_{16.2} & A_{16.3} & \cdots & A_{16.16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{U}_1 \\ \mathrm{U}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{U}_n \\ \vdots \\ \mathrm{U}_{16} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix}
B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & B_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & B_{32} & B_{33} & B_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & B_{43} & B_{44} & 0 & 0 & 0 & B_{48} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B_{51} & 0 & 0 & 0 & B_{55} & 0 & 0 & 0 & B_{59} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & B_{84} & 0 & 0 & 0 & B_{88} & 0 & 0 & 0 & B_{8.12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & B_{95} & 0 & 0 & 0 & B_{99} & 0 & 0 & 0 & B_{9.13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{12.8} & 0 & 0 & 0 & B_{12.12} & 0 & 0 & 0 & B_{12.16} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{13.9} & 0 & 0 & 0 & B_{13.13} & B_{13.14} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{14.13} & B_{14.14} & B_{14.15} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{15.14} & B_{15.15} & B_{15.16} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{16.12} & 0 & 0 & B_{16.15} & B_{16.16}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \psi_9 \\ \psi_{10} \\ \psi_{10} \\ \psi_{12} \\ \psi_{13} \\ \psi_{14} \\ \psi_{15} \\ \psi_{16} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{14} \\ F_{15} \\ F_{16} \end{Bmatrix}$$

(41−5)...

إذ تشير ψ_n إلى المشتق الناظمي الخارجي للمركبة $\boldsymbol{E_z}$ عند العقدة $\boldsymbol{n}$.

نلاحظ من المعادلات الأخيرة أنّه لا أهمية لقيمة ψ عند العقد الداخلية للجملة وإنما كتبناها هنا مقابلة لأسطر وأعمدة صفرية لتسهيل عملية جمع المصفوفتين **A** و**B**.

عدد المجاهيل=(**12** قيمة مجهولة للمتّجه ψ)+(**16** قيمة مجهولة للمتّجه **U**)= **28** مجهولاً.

لكن عدد المعادلات = **16** > عدد المجاهيل = **28**.

لذا نحن بحاجة إلى **12** معادلة أو شرطاً إضافياً على المعادلات الموجودة بين أيدينا كي نتمكن من حل هذه الجملة، فإذا فرضنا تحقق شروط دير خليه الحدية على محيط المنطقة نكون قد توصلنا إلى المعادلات المطلوبة التي يُمكن حلها باستخدام الخطوات التالية:

- نعيد ترتيب مركبات المتجه $\vec{U}$ فنجعلها في قسمين، الأول يحوي القيم عند العقد الداخلية أما الآخر فيحوي القيم عند العقد السطحية أي: $\vec{U} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{U^I} \\ \overrightarrow{U^S} \end{Bmatrix}$.

فمثلاً في الشّكل(4−4): $\overrightarrow{U^I} = \{U_6, U_7, U_{10}, U_{11}\}$ ، أما $\overrightarrow{U^S}$ فيحوي قيم $\vec{U}$ عند العقد السطحية.

- نأخذ المتجه $\vec{\psi}$ الذي يحوي قيم المشتق الناظمي عند جميع العقد باستثناء العقد الداخلية أي:

$$\vec{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_8, \psi_9, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{14}, \psi_{15}, \psi_{16}\}^T$$

- نُبدّل في العلاقات(5−41) فنجد أنّها تصبح بالشّكل:

$$\begin{bmatrix} A^{II} & A^{IS} \\ A^{SI} & A^{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overrightarrow{U^I} \\ \overrightarrow{U^S} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\psi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F^I} \\ \overrightarrow{F^S} \end{Bmatrix} \qquad (42-5)...$$

حيث:

A^{II} مصفوفة جزئية من **A** ناتجة عن التأثير المتبادل بين العقد الداخلية فقط.

A^{IS} و A^{SI} مصفوفة جزئية من **A** ناتجة عن التأثير المتبادل بين العقد الداخلية والسطحية.

A^{SS} مصفوفة جزئية من **A** ناتجة عن التأثير المتبادل بين العقد السطحية فقط.

كما يرتبط المتجهين $\overrightarrow{F^I}$ و $\overrightarrow{F^S}$ بالعقد الداخلية والعقد السطحية على الترتيب.

- كما يكون عند تحقق شروط ديرخليه الحدية: $\overrightarrow{U^S} = 0$ وبالتالي يُمكن تحليل جملة المعادلات (5−42) إلى جملتين:

$$A^{II}\overrightarrow{U^I} = \overrightarrow{F^I} \quad ...(5-43)$$

$$A^{SI}\overrightarrow{U^I} + B\vec{\psi} = \overrightarrow{F^S} \quad ...(5-44)$$

- بحل جملة المعادلات(5−43) نحصل على قيمة الحقل عند العقد الداخلية، وبهذا نستطيع إهمال التكامل على المحيط الموجود في العلاقة(5−18) إن لم نكن بحاجة إلى حساب قيمة المشتقات الناظمية للحقل، أمّا إذا رغبنا في إيجادها فيُمكننا تبديل حلول جملة المعادلات (5−43) في الجملة(5−44) لنجد أنّها تنتج من حل الجملة:

$$B\vec{\psi} = \overrightarrow{F^S} - A^{SI}\overrightarrow{U^I} \quad ...(5-45)$$

أمّا في المسائل التي تكون فيها: $\vec{F} = 0$ تصبح العلاقة (5−43) بالشّكل: $A^{II}\overrightarrow{U^I} = 0$ أو بشكل آخر تؤول إلى حل مسألة القيم الذاتيّة: $-K_{\Delta}^{II}\,\overrightarrow{\mathrm{E_z}} = \gamma^2 K^{II}\,\overrightarrow{\mathrm{E_z}}$.

مسألة (5−2):

لنأخذ مقطعاً عرضياً لدليل موجي تكون فيه $(p = 1, q = 1)$ ومكون من **(18)** عنصراً كما في الشّكل(5−4)، ويحقق الشرط الحدي التالي: $E_z = 0$ على المحيط، والمطلوب أوجد قيم E_z عند العقد الداخلية للجملة.

الحل:

سوف نعمل في هذه المسألة على توضيح كيفية إيجاد المصفوفتين ***A, B***، ومنها نشرح كيفية الحصول على المعادلات (5−43)،(5−44).

Matrix B:

```
s = 12; m = 16; n = 18;
X = {0, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1, 1.5};
Y = {0, 0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75};
NOfLocalOuterEdge[1] = {1, 2, 3, 4, 8, 12, 16, 15, 14, 13, 9, 5};
NOfLocalOuterEdge[2] = {2, 3, 4, 8, 12, 16, 15, 14, 13, 9, 5, 1};
NOfLocalNode[1] = {1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 9, 9, 10, 10, 11, 11};
NOfLocalNode[2] = {6, 2, 7, 3, 8, 4, 10, 6, 11, 7, 12, 8, 14, 10, 15, 11, 16, 12};
NOfLocalNode[3] = {5, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 16};
NOfenterNode = {6, 7, 10, 11};
p[e_] := 1;
q[e_] := 1;
```

s عدد الأضلاع الخارجية و***n*** عدد الأضلاع و***m*** عدد العقد

فواصل العقد وتراتيبها

```
Do[Do[S[i_, e_] := NOfLocalOuterEdge[i][[e]], {i, 2}], {e, s}]
Do[Do[xe[i_, e_] := X[[S[i, e]]], {e, s}], {i, 2}];
Do[Do[ye[i_, e_] := Y[[S[i, e]]], {e, s}], {i, 2}];
```

رقم العقدة ***i*** من الضلع ***e***

فاصلة وترتيب العقدة ***i*** من الضلع ***e***

```
N1x[x_, e_] := (xe[2, e] - x) / (xe[2, e] - xe[1, e]);
N1y[y_, e_] := (ye[2, e] - y) / (ye[2, e] - ye[1, e]);
ShapeF[1, e_] := Module[{e0 = e}, If[xe[1, e0] == xe[2, e0], Return[N1y[y, e0]], Return[N1x[x, e0]]]]
ShapeF[2, e_] := 1 - ShapeF[1, e]
```

$N_1^{(s)}(x,y)$, $N_2^{(s)}(x,y)$

```
EMIn = Table[0, {2}, {2}];
EM = Table[0, {m}, {m}];
```

مصفوفة الضلع

```
EdgeMatrix1[e_, EMIn_] :=
 Module[{EM = EMIn, i, j, e0 = e},
  If[xe[1, e0] == xe[2, e0], Do[Do[EM[[i, j]] = p[e] ∫_{ye[1,e0]}^{ye[2,e0]} ShapeF[i, e0] * ShapeF[j, e0] dy, {i, 2}],
    {j, 2}], Do[Do[EM[[i, j]] = p[e] ∫_{xe[1,e0]}^{xe[2,e0]} ShapeF[i, e0] * ShapeF[j, e0] dx, {i, 2}], {j, 2}]];
  Return[EM]]
```

مصفوفة الضلع رقم3

```
EdgeMatrix1[3, EMIn] // MatrixForm
```

//MatrixForm=

```
( 0.166667    0.0833333 )
( 0.0833333   0.166667  )
```

```
MergeEdgeMatrix[LEM_, eftab_, EM_] := Module[{i, j, ii, jj, A = EM, L = Length[eftab]},
   For[i = 1, i ≤ L, i ++, ii = eftab[[i]];
    For[j = 1, j ≤ L, j ++, jj = eftab[[j]]; A[[jj, ii]] = A[[ii, jj]] = LEM[[i, j]]]];
   Return[A]];
```

المصفوفة الموسّعة للضلع

```
MergeEdgeMatrix[EdgeMatrix1[3, EMIn], {NOfLocalOuterEdge[1][[3]], NOfLocalOuterEdge[2][[3]]},
  EM] // MatrixForm
```

//MatrixForm=

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.166667	0.0833333	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.0833333	0.166667	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

المصفوفة الموسّعة للضلع رقم3

المصفوفة الموسّعة للضلع

```
Do[MEM[e_] := MergeEdgeMatrix[EdgeMatrix1[e, EMIn],
    {NOfLocalOuterEdge[1][[e]], NOfLocalOuterEdge[2][[e]]}, EM], {e, 1, s}];
MEM[5] // MatrixForm
```

//MatrixForm=

$$
\left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0.0833333&0&0&0&0.0416667&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0.0416667&0&0&0&0.0833333&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right)
$$

```
B = Sum[MEM[i], {i, 1, s}]; Print[MatrixForm[B]]
```

$$B = \sum_{i=1}^{s} \text{MEM}[i];\ \text{Print}[\text{MatrixForm}[B]]$$

المصفوفة الموسّعة للجملة

$$
\left(\begin{array}{cccccccc}
0.0833333&0.0833333&0&0&-0.0416667&0&0&0\\
0.0833333&0.333333&0.0833333&0&0&0&0&0\\
0&0.0833333&0.333333&0.0833333&0&0&0&0\\
0&0&0.0833333&0.25&0&0&0&0.0416667\\
-0.0416667&0&0&0&-0.166667&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0.0416667&0&0&0&0.166667\\
0&0&0&0&-0.0416667&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0.0416667\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
-0.0416667&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0.0416667&0&0&0&0\\
-0.166667&0&0&0&-0.0416667&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0.166667&0&0&0&0.0416667\\
-0.0416667&0&0&0&-0.25&-0.0833333&0&0\\
0&0&0&0&-0.0833333&-0.333333&-0.0833333&0\\
0&0&0&0&0&-0.0833333&-0.333333&-0.0833333\\
0&0&0&0.0416667&0&0&-0.0833333&-0.0833333
\end{array}\right)
$$

يُمكن الآن وبخطوات مماثلة تماماً لتلك المتّبعة في المسألة(5−1) إيجاد المصفوفة **A** التالية:

المصفوفة **A**

-79.1775	16.2056	0	0	64.2056	0.411234	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16.2056	-158.766	16.2056	0	0	128.411	0.411234	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	16.2056	-158.766	16.2056	0	0	128.411	0.411234	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	16.2056	-79.5888	0	0	0	64.2056	0	0	0	0	0	0	0	0
64.2056	0	0	0	-158.766	32.4112	0	0	64.2056	0.411234	0	0	0	0	0	0
0.411234	128.411	0	0	32.4112	-317.533	32.4112	0	0	128.411	0.411234	0	0	0	0	0
0	0.411234	128.411	0	0	32.4112	-317.533	32.4112	0	0	128.411	0.411234	0	0	0	0
0	0	0.411234	64.2056	0	0	32.4112	-158.766	0	0	0	64.2056	0	0	0	0
0	0	0	0	64.2056	0	0	0	-158.766	32.4112	0	0	64.2056	0.411234	0	0
0	0	0	0	0.411234	128.411	0	0	32.4112	-317.533	32.4112	0	0	128.411	0.411234	0
0	0	0	0	0	0.411234	128.411	0	0	32.4112	-317.533	32.4112	0	0	128.411	0.411234
0	0	0	0	0	0	0.411234	64.2056	0	0	32.4112	-158.766	0	0	0	64.2056
0	0	0	0	0	0	0	0	64.2056	0	0	0	-79.5888	16.2056	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.411234	128.411	0	0	16.2056	-158.766	16.2056	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.411234	128.411	0	0	16.2056	-158.766	16.2056
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.411234	64.2056	0	0	16.2056	-79.1775

المصفوفة A^{II}

```
MatrixAII[K_, xx_, KM_] := Module[{i, j, ii, jj, A = KM, L = Length[xx]},
   For[i = 1, i ≤ L, i++, ii = xx[[i]];
    For[j = 1, j ≤ L, j++, jj = xx[[j]]; A[[i, j]] = A[[j, i]] = K[[ii, jj]]]];
   Return[A]];

KM = Table[0, {i, 4}, {j, 4}];

MatrixAII[K, {6, 7, 10, 11}, KM] // MatrixForm
```

//MatrixForm=

-317.533	32.4112	128.411	0.411234
32.4112	-317.533	0	128.411
128.411	0	-317.533	32.4112
0.411234	128.411	32.4112	-317.533

```
RarrangeMatrixA[K_, yy_, xx_, EM_] := Module[{i, j, ii, jj, A = EM, L = Length[yy]},
   For[i = 1, i ≤ L, i++, ii = yy[[i]];
    For[j = 1, j ≤ L, j++, jj = yy[[j]]; A[[i, j]] = A[[j, i]] = K[[ii, jj]]]];
   For[i = L + 1, i ≤ m, i++, ii = xx[[L - i]];
    For[j = L + 1, j ≤ m, j++, jj = xx[[L - j]]; A[[i, j]] = A[[j, i]] = K[[ii, jj]]]];
   Return[A]];
```

إعادة ترتيب المصفوفة **A**

```
RarrangeMatrixA[K, {6, 7, 10, 11}, {1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16}, EM] // MatrixForm
```

المصفوفة $\mathbf{A^{II}}$

-317.533	32.4112	128.411	0.411234	0	0	0	0
32.4112	-317.533	0	128.411	0	0	0	0
128.411	0	-317.533	32.4112	0	0	0	0
0.411234	128.411	32.4112	-317.533	0	0	0	0
0	0	0	0	-79.1775	16.2056	0	0
0	0	0	0	16.2056	-158.766	16.2056	0
0	0	0	0	0	16.2056	-158.766	16.2056
0	0	0	0	0	0	16.2056	-79.5888
0	0	0	0	64.2056	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.411234	64.2056
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
64.2056	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.411234	0	0	0	0	0	0
0	64.2056	0	0	0	0	0	0
-158.766	0	64.2056	0	0	0	0	0
0	-158.766	0	64.2056	0	0	0	0
64.2056	0	-158.766	0	64.2056	0.411234	0	0
0	64.2056	0	-158.766	0	0	0	64.2056
0	0	64.2056	0	-79.5888	16.2056	0	0
0	0	0.411234	0	16.2056	-158.766	16.2056	0
0	0	0	0	0	16.2056	-158.766	16.2056
0	0	0	64.2056	0	0	16.2056	-79.1775

أمّا لو أردنا إيجاد K_{Δ}^{II}, K^{II} مباشرة فيُمكن إنجاز ذلك مباشرة باتباع الخطوات التالية:

```
elementmatrix1[e_, Emin_] :=
 Module[{EM = Emin, i, j}, Do[Do[EM[[i, j]] = - p[e]/(4 Δ[e]) (b[i, e] * b[j, e] + c[i, e] * c[j, e]), {i, 3}],
   {j, 3}]; Return[EM]]
```

```
elementmatrix2[e_, Emin_] :=
 Module[{EM = Emin, i, j}, Do[Do[EM[[i, j]] = q[e] Δ[e]/12 (1 + KroneckerDelta[i, j]), {i, 3}], {j, 3}];
  Return[EM]]
```

```
Do[em1[i] = elementmatrix1[i, Emin], {i, n}];
Do[em2[i] = elementmatrix2[i, Emin], {i, n}];
Do[MM1[e_] := Mergeelementmatrix[em1[e], {k[1, e], k[2, e], k[3, e]}, Ain], {e, 1, n}];
Do[MM2[e_] := Mergeelementmatrix[em2[e], {k[1, e], k[2, e], k[3, e]}, Ain], {e, 1, n}];
```

$ss1 = \sum_{i=1}^{n} MM1[i]$; Print[MatrixForm[ss1]]

$ss2 = \sum_{i=1}^{n} MM2[i]$; Print[MatrixForm[ss2]]

$ss1 = \sum_{i=1}^{n} MM1[i]$; Print[MatrixForm[ss1]]

$K_\Delta =$

-80.	16.	0	0	64.	0.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16.	-160.	16.	0	0	128.	0.	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	16.	-160.	16.	0	0	128.	0.	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	16.	-80.	0	0	0	64.	0	0	0	0	0	0	0	0
64.	0	0	0	-160.	32.	0	0	64.	0.	0	0	0	0	0	0
0.	128.	0	0	32.	-320.	32.	0	0	128.	0.	0	0	0	0	0
0	0.	128.	0	0	32.	-320.	32.	0	0	128.	0.	0	0	0	0
0	0	0.	64.	0	0	32.	-160.	0	0	0	64.	0	0	0	0
0	0	0	0	64.	0	0	0	-160.	32.	0	0	64.	0.	0	0
0	0	0	0	0.	128.	0	0	32.	-320.	32.	0	0	128.	0.	0
0	0	0	0	0	0.	128.	0	0	32.	-320.	32.	0	0	128.	0.
0	0	0	0	0	0	0.	64.	0	0	32.	-160.	0	0	0	64.
0	0	0	0	0	0	0	0	64.	0	0	0	-80.	16.	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.	128.	0	0	16.	-160.	16.	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.	128.	0	0	16.	-160.	16.
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.	64.	0	0	16.	-80.

$K =$

0.0208333	0.00520833	0	0	0.00520833	0.0104167	0	0
0.00520833	0.03125	0.00520833	0	0	0.0104167	0.0104167	0
0	0.00520833	0.03125	0.00520833	0	0	0.0104167	0.0104167
0	0	0.00520833	0.0104167	0	0	0	0.00520833
0.00520833	0	0	0	0.03125	0.0104167	0	0
0.0104167	0.0104167	0	0	0.0104167	0.0625	0.0104167	0
0	0.0104167	0.0104167	0	0	0.0104167	0.0625	0.0104167
0	0	0.0104167	0.00520833	0	0	0.0104167	0.03125
0	0	0	0	0.00520833	0	0	0
0	0	0	0	0.0104167	0.0104167	0	0
0	0	0	0	0	0.0104167	0.0104167	0
0	0	0	0	0	0	0.0104167	0.00520833
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0.00520833	0.0104167	0	0	0	0	0	0
0	0.0104167	0.0104167	0	0	0	0	0
0	0	0.0104167	0.0104167	0	0	0	0
0	0	0	0.00520833	0	0	0	0
0.03125	0.0104167	0	0	0.00520833	0.0104167	0	0
0.0104167	0.0625	0.0104167	0	0	0.0104167	0.0104167	0
0	0.0104167	0.0625	0.0104167	0	0	0.0104167	0.0104167
0	0	0.0104167	0.03125	0	0	0	0.00520833
0.00520833	0	0	0	0.0104167	0.00520833	0	0
0.0104167	0.0104167	0	0	0.00520833	0.03125	0.00520833	0
0	0.0104167	0.0104167	0	0	0.00520833	0.03125	0.00520833
0	0	0.0104167	0.00520833	0	0	0.00520833	0.0208333

```
MatrixKΔII = MatrixAII[ss1, {6, 7, 10, 11}, KM]; Print[MatrixForm[MatrixKΔII]]
```

$$\begin{pmatrix} -320. & 32. & 128. & 0. \\ 32. & -320. & 0 & 128. \\ 128. & 0 & -320. & 32. \\ 0. & 128. & 32. & -320. \end{pmatrix}$$

K_{Δ}^{II}

```
MatrixKII = MatrixAII[ss2, {6, 7, 10, 11}, KM]; Print[MatrixForm[MatrixKII]]
```

$$\begin{pmatrix} 0.0625 & 0.0104167 & 0.0104167 & 0.0104167 \\ 0.0104167 & 0.0625 & 0 & 0.0104167 \\ 0.0104167 & 0 & 0.0625 & 0.0104167 \\ 0.0104167 & 0.0104167 & 0.0104167 & 0.0625 \end{pmatrix}$$

K^{II}

```
Hz = Eigenvectors[{-MatrixKΔII, MatrixKII}][[1]]

{0.46317, -0.534297, -0.534297, 0.46317}
```

```
HH = Table[0, {16}];
Do[HH[[NOfenterNode[[i]]]] = HH[[i]] + Hz[[i]], {i, 4}]
HH

{0, 0, 0, 0, 0, 0.46317, -0.534297, 0, 0, -0.534297, 0.46317, 0, 0, 0, 0, 0}
```

وللمقارنة بين الحل العددي والحل التحليلي نقوم بما يلي:

```
as[x_, y_] := Sin[2 π x/1.5] Sin[2 π y/0.75];
rr = Table[as[X[[i]], Y[[i]]], {i, 16}];
error = Table[Abs[rr[[i]] - HH[[i]]], {i, 1, 16}];
Print[
 Transpose[{Join[{"node"}, Table[i, {i, 16}]], Join[{"E^FEM"}, HH], Join[{"E^exact"}, rr],
   Join[{"Error=|E^FEM-E^exact|"}, error]}] // TableForm]
```

HH قيم الحقل عند العقد

as[x,y] الحل التحليلي

node	E^{FEM}	E^{exact}	$Error=\|E^{FEM}-E^{exact}\|$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0.46317	0.75	0.28683
7	-0.534297	-0.75	0.215703
8	0	-2.12115×10^{-16}	2.12115×10^{-16}
9	0	0	0
10	-0.534297	-0.75	0.215703
11	0.46317	0.75	0.28683
12	0	2.12115×10^{-16}	2.12115×10^{-16}
13	0	0	0
14	0	-2.12115×10^{-16}	2.12115×10^{-16}
15	0	2.12115×10^{-16}	2.12115×10^{-16}
16	0	5.99904×10^{-32}	5.99904×10^{-32}

جدول مقارنة بين القيم التحليلية للحقل والقيم الناتجة عن استخدام **FEM**

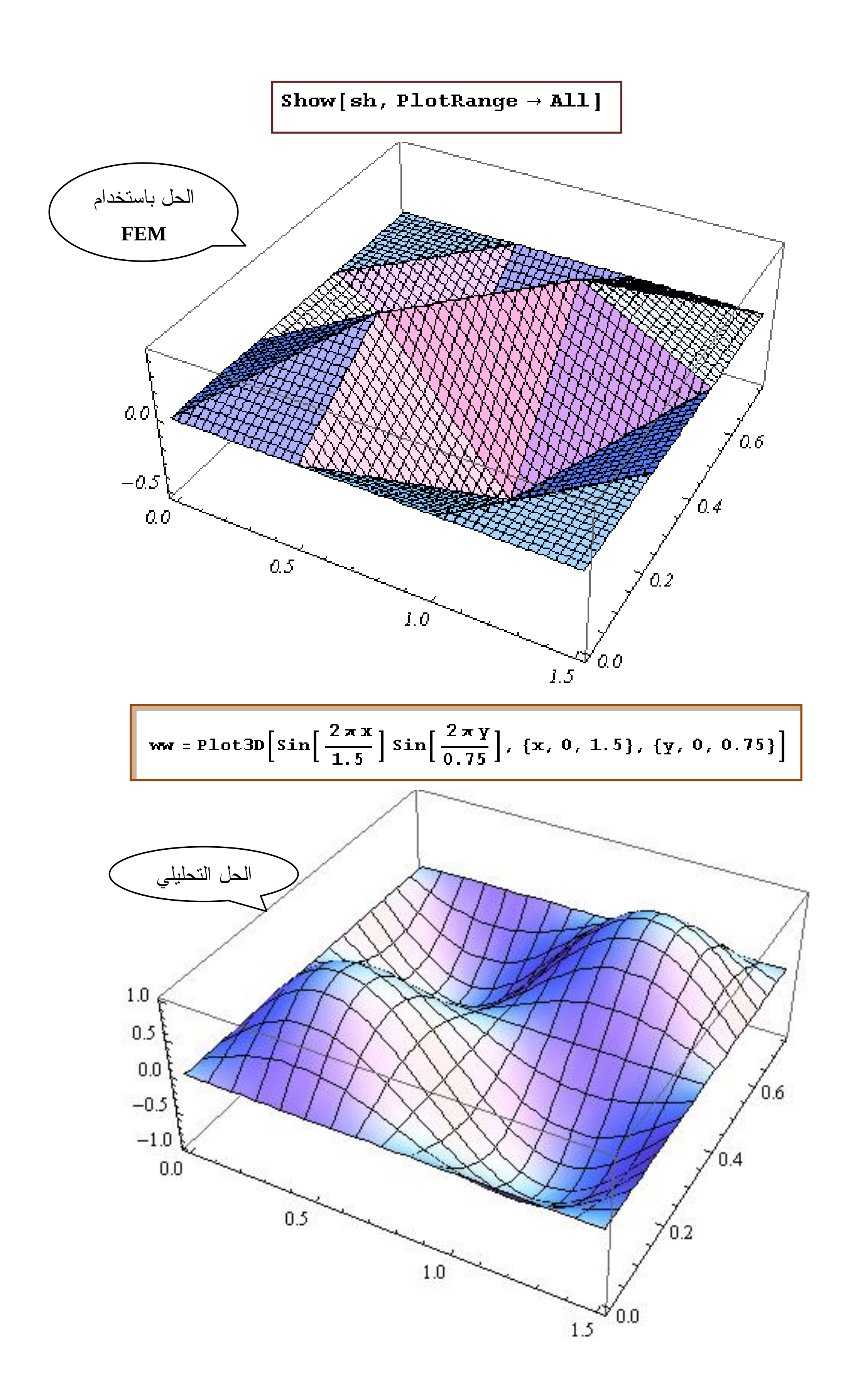
نلاحظ من الجدول السابق أنّ الأخطاء معدومة من أجل العقد المتوضّعة على محيط المنطقة المدروسة، أي عند جميع العقد باستثناء العقد ذوات الأرقام (**6,7,10,11**)، وأنّه يأخذ قيماً متناظرة بالنسبة إلى الخط الفاصل بين العقدتين الثامنة والتاسعة.

ولتوضيح ذلك بيانيّاً نقوم برسم الحل العددي الناتج عن تطبيق طريقة العناصر المنتهية كما يلي:

```
G = Table[Table[NOfLocalNode[i][[e]], {i, 3}], {e, n}];
w[e_, i_] := HH[[G[[e, i]]]]
nm = Table[Null, {e, n}];
Do[nm[[e]] = N[Simplify[Sum[w[e, i] ξ[i, e], {i, 1, 3}]]], {e, n}];
```

```
qs = Table[Null, {i, n}, {j, 4}];
Do[qs[[i, 1]] = Min[x[1, i], x[2, i], x[3, i]]; qs[[i, 2]] = Max[x[1, i], x[2, i], x[3, i]];
 qs[[i, 3]] = Min[y[1, i], y[2, i], y[3, i]]; qs[[i, 4]] = Max[y[1, i], y[2, i], y[3, i]],
 {i, n}]
```

```
sh1[e_] := Plot3D[nm[[e]], {x, qs[[e, 1]], qs[[e, 2]]},
  {y, qs[[e, 3]], qs[[e, 3]] + 0.5 (x - qs[[e, 1]])}]
sh2[e_] := Plot3D[nm[[e]], {x, qs[[e, 1]], qs[[e, 2]]},
  {y, qs[[e, 3]] + 0.5 (x - qs[[e, 1]]), qs[[e, 4]]}]
sh = Table[Null, {i, n}];
Do[sh[[e]] = Piecewise[{{sh1[e], Mod[e, 2] == 0}, {sh2[e], Mod[e, 2] == 1}}], {e, n}]
```

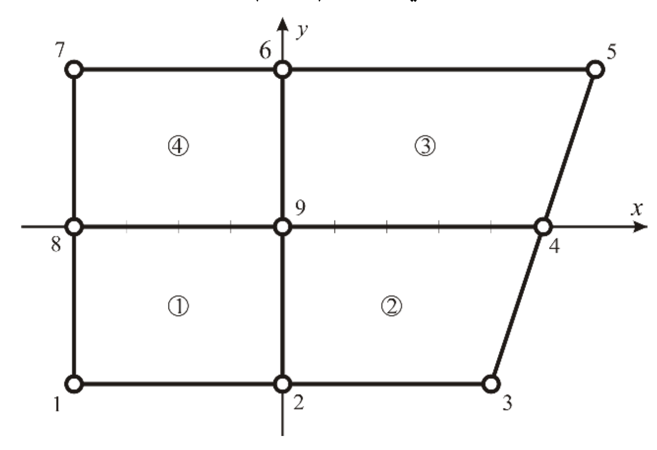

Show[sh, PlotRange → All]
الحل باستخدام
FEM
0.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
0.0
0.2
0.4
0.6
ww = Plot3D[Sin[2 π x / 1.5] Sin[2 π y / 0.75], {x, 0, 1.5}, {y, 0, 0.75}]
الحل التحليلي
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
0.0
0.2
0.4
0.6

5-2-4. تجزئة المنطقة إلى عناصر رباعية الأضلاع:

تتألف هذه المرحلة وكما في حالة التجزئة إلى عناصر مثلثيّة من ثلاث خطوات أساسيّة هي:

١. **الفصل:**

وتتضمن هذه الخطوة تجزئة المنطقة المدروسة إلى مجموعة من الأشكال رباعية الأضلاع الصغيرة تدعى بالعناصر المستطيلة كما في الشّكل(5-6).



الشّكل (5-6) منطقة مجزأة إلى عناصر مستطيلة

٢. **الإحداثيات الطبيعية:**

تُرقّم عقد كل رباعي أضلاع e بالأرقام **1,2,3,4** ويأخذ المتغير عند هذه العقد القيم $U_1^{(e)}, U_2^{(e)}, U_3^{(e)}, U_4^{(e)}$.

وتُستخدم الإحداثيات المركزية للتعبير عن موضع أو قيمة المتغير عند كل نقطة من نقاط العنصر بالشّكل:

$$y^{(e)} = \sum_{i=1}^{4} y_i^e N_i^{(e)} \text{ ، } x^{(e)} = \sum_{i=1}^{4} x_i^e N_i^{(e)}$$

علماً أنّ:

$$N_i^{(e)}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \quad ; i = 1,2,3,4 \qquad (46\text{-}5)...$$

٣. **صيغة العنصر:**

نُوجد في هذه المرحلة مصفوفة كل عنصر وذلك اعتماداً على جملة الإحداثيات المركزية المنسوب إليها ويتمُّ ذلك وفق الآتي:

لنختار من أجل كل عنصر e تمثيلاً خطياً للمتغير $U^{(e)}$ معرفاً وفق العلاقة:

$$\widetilde{U}^{(e)}(x,y) = \sum_{i=1}^{4} N_i^{(e)} U_i^{(e)} = (\overrightarrow{N^{(e)}})^T \overrightarrow{U^{(e)}} \qquad (47\text{-}5)...$$

وذلك بجعل:

$$(\overrightarrow{U^{(e)}})^T = \{U_1^{(e)} \quad U_2^{(e)} \quad U_3^{(e)} \quad U_4^{(e)}\}$$

حيث أنّ $U_1^{(e)}$ و $U_2^{(e)}$ و $U_3^{(e)}$ و $U_4^{(e)}$ هي قيم متغير الحقل عند عقد العنصر رقم $\boldsymbol{e}$.

نُبدّل(5−47) في الشّكل الضّعيف لمعادلة الموجة(5−13) (مع ملاحظة أنّ $W^{(e)} = N^{(e)}$) فنجد أنّ:

$$\sum_{e=1}^{N_e}\left\{\overrightarrow{U^{(e)}}\iint_{\Omega^e}\left[-P\,\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}.\left(\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}\right)^T + k_0^2 q\ \overrightarrow{N^{(e)}}\ \left(\overrightarrow{N^{(e)}}\right)^T\right]dxdy\ +\right.$$

$$(48-5)\ldots\qquad \left.\oint_{c^e} P\ \overrightarrow{N^{(e)}}\left(\hat{n}^e.\nabla\overrightarrow{\tilde{U}^{(e)}}\right)dl - \iint_{\Omega^e}\overrightarrow{N^{(e)}}\,f\,dxdy\right\} = 0$$

$$(49-5)\ldots\qquad \nabla\overrightarrow{N^{(e)}} = \begin{Bmatrix}\nabla N_1^{(e)}\\ \nabla N_2^{(e)}\\ \nabla N_3^{(e)}\\ \nabla N_4^{(e)}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y}\end{bmatrix}$$

وبما أنّ $N^{(e)} = 0$ عند جميع العناصر عدا العنصر ***e*** فإن حذف المجموع على جميع العناصر في العلاقة(5−9) أمرٌ ممكن، وبالتالي يُمكن أن نكتب من أجل أي عنصر ***e*** :

$$\overrightarrow{U^{(e)}}\iint_{\Omega^e}\left[-P\,\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}.\left(\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}\right)^T + k_0^2 q\ \overrightarrow{N^{(e)}}\ \left(\overrightarrow{N^{(e)}}\right)^T\right]dxdy$$

$$+\oint_{c^e} P\ \overrightarrow{N^{(e)}}\left(\hat{n}^e.\nabla\overrightarrow{\tilde{U}^{(e)}}\right)dl\ = \iint_{\Omega^e}\overrightarrow{N^{(e)}}\,f\,dxdy$$

أو باختصار:

$$(50-5)\ldots\qquad A^{(e)}\overrightarrow{U^{(e)}} + \overrightarrow{EndPoints^{(e)}} = \overrightarrow{F^{(e)}}$$

ندعو جملة المعادلات الخطية(5−50) بالجملة المصفوفية للعنصر ***e***، في حين تُدعى المصفوفة $A^{(e)}$ بمصفوفة العنصر ***e*** ويُمكن التعبير عنها بالشّكل:

$$(51-5)\ldots\qquad A^{(e)} = K_\Delta^{(e)} + k_0^2 K^{(e)}$$

حيث أنّ:

$$(52-5)\ldots\qquad K_\Delta^{(e)} = -\iint_{\ e} p\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}.\left(\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}\right)^T dxdy$$

$$(53-5)\ldots\qquad K^{(e)} = \iint_{\Omega^e} q\ \overrightarrow{N^{(e)}}\ \left(\overrightarrow{N^{(e)}}\right)^T dxdy$$

$$(54-5)\ldots\qquad \overrightarrow{F^{(e)}} = \iint_{\Omega^e}\overrightarrow{N^{(e)}}\,f\,dxdy$$

$$(55-5)\ldots\qquad EndPoints^{(e)} = \oint_{c^e} P\ \overrightarrow{N^{(e)}}\left(\hat{n}^e.\nabla\overrightarrow{\tilde{U}^{(e)}}\right)dl$$

بالتعويض نجد:

$$\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}\left(\nabla\overrightarrow{N^{(e)}}\right)^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x}\\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}(\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x})^2+(\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y})^2 & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y} & (\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x})^2+(\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y})^2 & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y} & (\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x})^2+(\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y})^2 & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y}\\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial x}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x}+\frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial y}\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y} & (\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial x})^2+(\frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial y})^2\end{bmatrix}$$

مع الأخذ بعين الاعتبار أنّ:

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \eta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y}\end{Bmatrix}=\left[J^{(e)}\right]\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y}\end{Bmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y}\end{Bmatrix}=\left[J^{(e)}\right]^{-1}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \eta}\end{Bmatrix}$$

$$\left[J^{(e)}\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_1^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3^{(e)}}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4^{(e)}}{\partial \eta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^e & y_1^e\\ x_2^e & y_2^e\\ x_3^e & y_3^e\\ x_4^e & y_4^e\end{bmatrix}$$

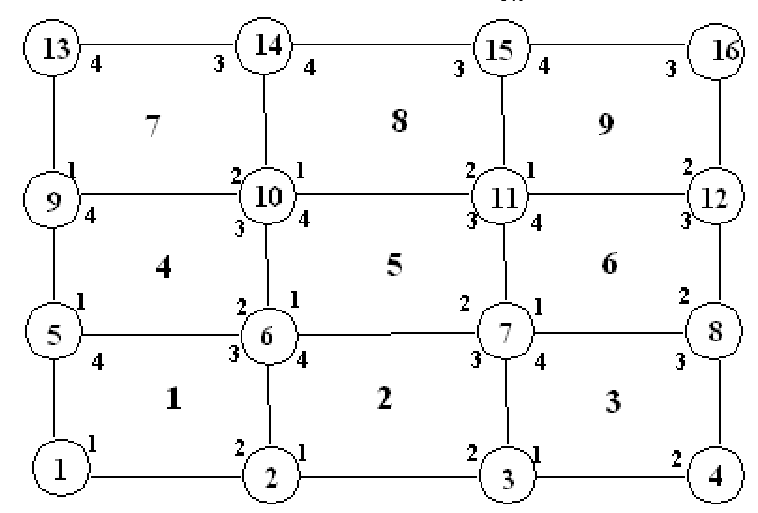
$$\left[J^{(e)}\right]=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta)\\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^e & y_1^e\\ x_2^e & y_2^e\\ x_3^e & y_3^e\\ x_4^e & y_4^e\end{bmatrix}$$

مسألة (5-3):

أوجد حل تقريبي للمعادلة التفاضلية $\nabla_t.(p(x,y)\,\nabla_t U(x,y)) + k_0^2 q(x,y)U(x,y) = 0$

على المنطقة الموضحة بالشّكل(5-7)، وذلك من أجل: $p(x,y) = q(x,y) = 1$.

والمحققة لشروط نيومان الحدية: $\hat{n}.\overline{\nabla}\mathrm{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial n} = 0$ على المحيط.



الشّكل (5-7) مستطيل أبعاده **(0.75 × 1.5)** مجزأة إلى تسع عناصر مستطيلة

مع العلم أنّ إحداثيات عقد المنطقة تُعطى بالجدول التالي:

الرقم المعمم للعقدة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
الفاصلة	0	0.5	1	1.5	0	0.5	1	1.5	0	0.5	1	1.5	0	0.5	1	1.5
الترتيب	0	0	0	0	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.5	0.75	0.75	0.75	0.75

الحل:

لنعتمد من أجل الحل الترقيم التالي للعقد والعناصر:

أرقام العناصر	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n(1,e)$	1	2	3	5	6	7	9	10	11
$n(2,e)$	2	3	4	6	7	8	10	11	12
$n(3,e)$	6	7	8	10	11	12	14	15	16
$n(4,e)$	5	6	7	11	10	11	13	14	15

نقوم بإدخال البيانات السابقة إلى البرنامج:

```
s = 12; m = 16; n = 9;
X = {0, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 0, 0.5, 1, 1.5};
Y = {0, 0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75};
p[e_] := 1;
q[e_] := 1;
```

```
ξ = {-1, 1, 1, -1};
θ = {-1, -1, 1, 1};
```

```
NOLN[1] = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11};
NOLN[2] = {2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12};
NOLN[3] = {6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16};
NOLN[4] = {5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15};
```

```
Do[Do[k[i_, e_] := NOLN[i][[e]], {i, 4}], {e, n}]
Do[Do[x[i_, e_] := X[[k[i, e]]], {i, 4}], {e, n}];
Do[Do[y[i_, e_] := Y[[k[i, e]]], {i, 4}], {e, n}];
```

$$ShF[i_, \xi_, \eta_] := \frac{1}{4}\left(1 + \xi_{[[i]]}\, \xi\right)\left(1 + \theta_{[[i]]}\, \eta\right)$$

لنوجد في البداية مصفوفة تحويل جاكوبي المرتبطة بكل عنصر:

$$x[\xi_, \eta_, e_] := Simplify\left[\sum_{i=1}^{4} ShF[i, \xi, \eta]\; x[i, e]\right]$$

$$y[\xi_, \eta_, e_] := Simplify\left[\sum_{i=1}^{4} ShF[i, \xi, \eta]\; y[i, e]\right]$$

```
J[e_] := Simplify[{Table[∂ξ ShF[i, ξ, η], {i, 4}], Table[∂η ShF[i, ξ, η], {i, 4}]}.
    Transpose[{Table[x[i, e], {i, 4}], Table[y[i, e], {i, 4}]}]];
```

```
Do[Print[MatrixForm[{Table[∂ξ ShF[i, ξ, η], {i, 4}], Table[∂η ShF[i, ξ, η], {i, 4}]}].
   MatrixForm[Transpose[{Table[x[i, e], {i, 4}], Table[y[i, e], {i, 4}]}]], "=",
  MatrixForm[J[e]], "⇒", "|J(e)|=", Factor[Det[J[e]]]], {e, n}]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-1+\eta) & \frac{1-\eta}{4} & \frac{1+\eta}{4} & \frac{1}{4}(-1-\eta) \\ \frac{1}{4}(-1+\xi) & \frac{1}{4}(-1-\xi) & \frac{1+\xi}{4} & \frac{1-\xi}{4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0. \\ 0. & 0.125 \end{pmatrix} \Rightarrow |J^{(e)}| = 0.03125$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-1+\eta) & \frac{1-\eta}{4} & \frac{1+\eta}{4} & \frac{1}{4}(-1-\eta) \\ \frac{1}{4}(-1+\xi) & \frac{1}{4}(-1-\xi) & \frac{1+\xi}{4} & \frac{1-\xi}{4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0. \\ 0. & 0.125 \end{pmatrix} \Rightarrow |J^{(e)}| = 0.03125$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-1+\eta) & \frac{1-\eta}{4} & \frac{1+\eta}{4} & \frac{1}{4}(-1-\eta) \\ \frac{1}{4}(-1+\xi) & \frac{1}{4}(-1-\xi) & \frac{1+\xi}{4} & \frac{1-\xi}{4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.5 & 0 \\ 1.5 & 0.25 \\ 1 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0. \\ 0. & 0.125 \end{pmatrix} \Rightarrow |J^{(e)}| = 0.03125$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-1+\eta) & \frac{1-\eta}{4} & \frac{1+\eta}{4} & \frac{1}{4}(-1-\eta) \\ \frac{1}{4}(-1+\xi) & \frac{1}{4}(-1-\xi) & \frac{1+\xi}{4} & \frac{1-\xi}{4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0. \\ 0. & 0.125 \end{pmatrix} \Rightarrow |J^{(e)}| = 0.03125$$

عرضنا في البرنامج الأخير مصفوفة تحويل جاكوبي للعناصر الأربع الأولى فقط مع تفصيل لخوارزمية إيجادها، ونشير إلى أنّ مصفوفات تحويل جاكوبي الناتجة للعناصر الأخرى هي نفسها السابقة في مثالنا هذا وبالتالي فإنّ مقلوب كل منها هو:

$$[J^{(e)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 4. & 0. \\ 0. & 8. \end{pmatrix}$$

وتكون المصفوفات $B^{(e)}$ متماثلة أيضاً من أجل جميع العناصر وتُعطى بالشّكل التالي:

```
B[e_] := Factor[Inverse[J[e]].{Table[∂ξ ShF[i, ξ, η], {i, 4}],
     Table[∂η ShF[i, ξ, η], {i, 4}]}]
```

$$N[1] = \begin{pmatrix} 1.\ (-1.+1.\ \eta) & -1.\ (-1.+1.\ \eta) & 1.\ (1.+1.\ \eta) & -1.\ (1.+1.\ \eta) \\ 2.\ (-1.+1.\ \xi) & -2.\ (1.+1.\ \xi) & 2.\ (1.+1.\ \xi) & -2.\ (-1.+1.\ \xi) \end{pmatrix}$$

والآن أصبح بإمكاننا إيجاد المصفوفات العنصرية $K_{\Delta}^{(e)}$ التالية:

```
S[e_] := Transpose[B[e]].B[e];
```

```
KK = Table[0, {4}, {4}];
KMat1[e_, KK_] :=
 Module[{K = KK}, Do[Do[K[[i, j]] = K[[j, i]] = N[∫_{-1}^{1}∫_{-1}^{1} S[e][[i, j]] Det[J[e]] dξ dη]
    , {i, 4}], {j, 4}]; Return[K]]
```

$$\begin{pmatrix} 0.833333 & 0.166667 & -0.416667 & -0.583333 \\ 0.166667 & 0.833333 & -0.583333 & -0.416667 \\ -0.416667 & -0.583333 & 0.833333 & 0.166667 \\ -0.583333 & -0.416667 & 0.166667 & 0.833333 \end{pmatrix}$$

كذلك المصفوفات العنصرية $K^{(e)}$:

```
KMat2[e_, KK_] := Module[{K = KK}, Do[Do[K[[i, j]] = K[[j, i]] =
     N[∫_{-1}^{1}∫_{-1}^{1} ShF[i, ξ, η] ShF[j, ξ, η] Det[J[e]] dξ dη],
   {i, 4}], {j, 4}]; Return[K]]
```

$$\begin{pmatrix} 0.0138889 & 0.00694444 & 0.00347222 & 0.00694444 \\ 0.00694444 & 0.0138889 & 0.00694444 & 0.00347222 \\ 0.00347222 & 0.00694444 & 0.0138889 & 0.00694444 \\ 0.00694444 & 0.00347222 & 0.00694444 & 0.0138889 \end{pmatrix}$$

أمّا المصفوفات الموسّعة المقابلة لها فهي:

```
AMin = Table[0, {m}, {m}];

MergeKMat[AM_, eftab_, AMin_] := Module[{i, j, ii, jj,
    A = AMin, L = Length[eftab]}, For[i = 1, i ≤ L, i++,
    ii = eftab[[i]]; For[j = 1, j ≤ L, j++, jj = eftab[[j]];
     A[[jj, ii]] = A[[ii, jj]] = AM[[i, j]]]];
   Return[A]];

Do[AG1[e_] := MergeKMat[KMat1[e, KK], {k[1, e], k[2, e], k[3, e], k[4, e]},
    AMin], {e, 1, n}];

Do[AG2[e_] := MergeKMat[KMat2[e, KK], {k[1, e], k[2, e], k[3, e], k[4, e]},
    AMin], {e, 1, n}];
```

$LA1 = \sum_{e=1}^{n} AG1[e];$ ← المصفوفة $K_{\Delta}^{(e)}$ الموسعة

$LA2 = \sum_{e=1}^{n} AG2[e];$ ← المصفوفة $K^{(e)}$ الموسعة

و عند حلّ مسألة القيم الذاتية الناتجة نحصل على:

```
ss = Eigenvectors[{LA1, LA2}][[1]]

{0.25, -0.25, 0.25, -0.25, -0.25, 0.25, -0.25,
 0.25, 0.25, -0.25, 0.25, -0.25, -0.25, 0.25, -0.25, 0.25}
```

```
ss = Eigenvectors[{LA1, LA2}][[1]];
as[x_, y_] := Cos[2 π x / 1.5] Cos[2 π y / 0.75]
rr = Table[as[X[[i]], Y[[i]]], {i, 16}];
error = Table[Abs[rr[[i]] - ss[[i]]], {i, 1, 16}];
Print[
  Transpose[{Join[{"node"}, Table[i, {i, 16}]], Join[{"E^FEM"}, ss], Join[{"E^exact"}, rr],
     Join[{"Error=|E^FEM-E^exact|"}, error]}] // TableForm];
```

node	E^{FEM}	E^{exact}	$Error=\|E^{FEM}-E^{exact}\|$
1	0.25	1	0.75
2	-0.25	-0.5	0.25
3	0.25	-0.5	0.75
4	-0.25	1.	1.25
5	-0.25	-0.5	0.25
6	0.25	0.25	5.55112×10^{-17}
7	-0.25	0.25	0.5
8	0.25	-0.5	0.75
9	0.25	-0.5	0.75
10	-0.25	0.25	0.5
11	0.25	0.25	2.22045×10^{-16}
12	-0.25	-0.5	0.25
13	-0.25	1.	1.25
14	0.25	-0.5	0.75
15	-0.25	-0.5	0.25
16	0.25	1.	0.75

المقارنة بين الحلين
العددي والتحليلي

نلاحظ من الجدول السابق أنّ قيم الخطأ متناظرة بالنسبة إلى الخط الفاصل بين العقدتين الثامنة والتاسعة، ويعود ذلك إلى أن كلاً من الحلين التحليلي والعددي يأخذان قيماً متناظرة بالنسبة للخط نفسه، وأنّ أصغر قيمة للخطأ تبدو عند العقد ذوات الأرقام: (**6,11**) المتوضعتين في منتصف المنطقة المدروسة، أمّا أعظم قيمه فيبلغها عند عقدتي المستطيل الرابعة والثالثة عشر.[1]

[1] قد تبدو الأخطاء في الأمثلة التي استعرضناها كبيرة نسبياً إلا أنّ ذلك يعود بشكلٍ رئيسي إلى أنّ عدد عناصر التجزئة صغير نوعاً ما حيث أنّ معظم المسائل التي تتمّ دراستها بطريقة العناصر المنتهية يصل عدد العناصر المستخدمة في تجزئة المنطقة المدروسة فيها إلى المئات أو حتّى الآلاف، لذا لا بدّ من زيادة عدد العناصر المستخدمة في تجزئة المنطقة إن أردنا الحصول على د دّقة أكبر.

5–3. حل معادلات ماكسويل في (2-D) باستخدام دوال قاعدة الأضلاع:

استخدمنا في الجزء السابق من هذا الفصل دوال قاعدة العقد من أجل حل المسائل الكهرطيسية في المستوي بطريقة العناصر المنتهية، فاعتمدت هذه الطريقة على فكرة أساسيّة ألا وهي كتابة الدّالة المجهولة على شكل تركيب خطي لدوال قاعدة الأضلاع في قيم هذه الدّالة عند عقد المنطقة المدروسة، ولقد كانت هذه الطريقة فعالة في حالة الكمونات المستقرة أو في حالة الدليل الموجي المتجانس وفي مسائل التشتت في المستوي، لكن ماذا عن الحالة التي يكون فيها الدليل الموجي غير متجانس؟

هل سيكون من الملائم استخدام عناصر العقد؟!

وما البديل في مثل هذه الحالة؟!.

للإجابة عن هذه الأسئلة يجب أن نعلم أنّه يُمكن التعبير عن مسائل الدليل الموجي غير المتجانس باستخدام معادلة الموجة الشّعاعية التالية:[1]

$$\overrightarrow{\nabla_t} \times \frac{1}{\mu_r}\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{E_t} - \frac{i\beta}{\mu_r}\left(\overrightarrow{\nabla_t}E_z + i\beta\overrightarrow{E_t}\right) - {k_0}^2\varepsilon_r\overrightarrow{E_t} = 0 \qquad (56-5)...$$

$$\overrightarrow{\nabla_t} \times [\frac{1}{\mu_r}(\overrightarrow{\nabla_t}E_z + i\beta\overrightarrow{E_t}) \times \vec{k}] - {k_0}^2\varepsilon_r E_z\vec{k} = 0 \qquad (57-5)...$$

حيث:

$$\vec{E} = \underbrace{E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath}}_{E_t} + E_z\vec{k} = \overrightarrow{E_t} + E_z\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}}_{\overrightarrow{\nabla_t}} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \overrightarrow{\nabla_t} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

إلا أنّ هذه العبارات تتطّلب منّا استخدام قاعدةٍ ملائمةٍ لنشر مركبة الحقل الشّعاعي الكهربائي $\overrightarrow{E_t}$ أو الحقل الشّعاعي المغناطيسي $\overrightarrow{H_t}$، وبما أنّ الحقول الشّعاعية ذات طبيعة كهرطيسية فإنّ استخدام قاعدة العقد لن يكون مجدياً في هذه الحالة، إذ أنّ النشر وفق هذه الطريقة يتطلّب تحديداً لقيم الحقل عند عقد العناصر والتي قد لايكون معرفاً عندها (كالزوايا)، كما أنّ هذا قد يسبب عائقاً عندما تستلزم الشروط الحدية المفروضة استمرار المركبة المماسيّة للحقل، فضلاً على أنّه قد يؤدي إلى حلول غير واقعية تظهر في مسائل القيم الذاتيّة.

من هنا كان استخدام دوال قاعدة الأضلاع هو الأمثل في المسائل الكهرطيسية، إذ يتمُّ في هذه الحالة كتابة متغير الحقل على شكل تركيب خطي لدوال قاعدة الأضلاع بمتوسطات قيم الحقل المماس

[1] سوف نرمز من الآن فصاعداً لمتغير الحقل عند استخدام دوال قاعدة الأضلاع بالرمز $\vec{E}(x,y)$ أو $\vec{H}(x,y)$ بدلاً عن **U(x,y)**، إذ نترك الأخير للتعبير عن المقادير السّلمية لا الشّعاعية.

على الأضلاع، وتتميز هذه الطريقة بأنّها تفترض استمرار المركبة المماسيّة للحقل على محيط العنصر، في حين تسمح بعدم استمرار المركبة الناظمية له.

5-3-1. الشّكل الضّعيف لمعادلة الموجة الشّعاعية في (2-D):

ليكن $\vec{F}^{e}$ يرمز للحقل الكهربائي أو المغناطيسي المؤثر في العنصر e عندئذ يُمكن نشره بالشّكل:

$$\overrightarrow{F^{(e)}} = \sum_{k=1}^{N} F_k^{(e)} \overrightarrow{W_k^{(e)}} \quad \text{(58-5) ...}$$

حيث أنّ F_k^e القيمة المتوسطة لقيمة الحقل F على الضلع k من العنصر e، و **N** عددأضلاع العنصر.

والآن يتوجب علينا لإيجاد الحل بطريقة العناصر المنتهية اعتماداً على دوال قاعدة الأضلاع أن نوجد الشّكل الضّعيف للمعادلتين (5-56) و(5-57)، لكن وبما أنّ الحلول غير الواقعية تظهر غالباً في مسائل القيم الذاتية فإنّنا سنوجد الشّكل الضّعيف للمعادلة:

$$\overrightarrow{\nabla_t} \times (\frac{1}{\mu_r}\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{E_t}) - \gamma^2 \overrightarrow{E_t} = 0 \quad \text{(59-5)...}$$

نقوم في البداية بضرب طرفي المعادلة(5-59) بدالة الوزن $\overrightarrow{T_i}$ ثم نأخذ تكامل هذه العبارة على محيط المنطقة المدروسة:

$$\iint_{\Omega} \overrightarrow{T_i}\left[\overrightarrow{\nabla_t} \times \left(\frac{1}{\mu_r}\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{E_t}\right) - \gamma^2 \overrightarrow{E_t}\right] dxdy = 0 \quad ; i = 1,2,3 \quad \text{(60-5)...}$$

والآن بالاستفادة من العلاقات التالية **[15]**:

$$\overrightarrow{T_i}.(\overrightarrow{\nabla_t} \times \vec{A}) = (\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{T_i}).\vec{A} - \overrightarrow{\nabla_t}.(\overrightarrow{T_i} \times \vec{A}) \quad \text{(61-5)...}$$

$$(\overrightarrow{T_i} \times \vec{A}).\hat{n} = -\overrightarrow{T_i}.(\hat{n} \times \vec{A}) \quad \text{(62-5).}$$

$$\iint_{\Omega} \overrightarrow{\nabla_t}.(\overrightarrow{T_i} \times \vec{A})ds = \oint_C (\overrightarrow{T_i} \times \vec{A}).\hat{n}dl \quad \text{(63-5)...}$$

نجد أنّ:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{\mu_r}(\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{T_i}).(\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{E_t}) - \gamma^2 \overrightarrow{T_i}.\overrightarrow{E_t}\right] dxdy + \oint_C \overrightarrow{T_i}.(\hat{n} \times \overrightarrow{\frac{1}{\mu_r}\nabla_t} \times \overrightarrow{E_t})dl = 0 \quad \text{(64-5)...}$$

حيث أنّ الحدّ الأخير في العلاقة(5-64) يتحدد من الشروط الحدية المفروضة على المحيط **C**، فإذا كان السطح الخارجي للمنطقة معدنياً حذف التكامل على المحيط لأنّه في مثل هذه الحالة يكون: $\overrightarrow{E_t} \times \hat{n} = 0$ على محيط المنطقة.

نُبدّل(5-58) في(5-64) ونأخذ $\overrightarrow{T_i} = \overrightarrow{W_n^{(e)}}$ فنحصل على جملة من المعادلات لها الشّكل:

$$A^{(e)}\overrightarrow{E_n^{(e)}} + \overrightarrow{EndPoints^{(e)}} = 0 \quad \text{(65-5)...}$$

حيث أنّ $\overrightarrow{E_n^{(e)}}$ متجه القيم المتوسطة للحقل عند أضلاع العنصر $\boldsymbol{e}$.

ندعو جملة المعادلات الخطية(5−65) بالجملة المصفوفية للعنصر $\boldsymbol{e}$، في حين تدعى المصفوفة $A^{(e)}$ بمصفوفة العنصر $\boldsymbol{e}$ ويُمكن التعبير عنها بالشّكل:

$$(66-5)... \qquad A^{(e)} = K_{\Delta}^{(e)} + \gamma^2 K^{(e)}$$

وتُعطى عناصر المصفوفتين $K_{\Delta}^{(e)}, K^{(e)}$ بالعلاقات:

$$(67-5)... \qquad K_{\Delta,nm}^{(e)} = \frac{1}{\mu_r^e} \iint_{\Omega^e} \left(\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{W_n^{(e)}}\right) . \left(\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{W_m^{(e)}}\right) dxdy$$

$$(68-5)... \qquad K_{nm}^{(e)} = -\iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_n^{(e)}} . \overrightarrow{W_m^{(e)}} dxdy$$

أمّا:

$$(69-5)... \quad \overrightarrow{EndPoints^{(e)}} = \oint_C \overrightarrow{T_i} . \left(\hat{n} \times \overrightarrow{\frac{1}{\mu_r} \nabla_t} \times \overrightarrow{E_t}\right) dl$$

الآن وبعد أن أوجدنا الشّكل الضّعيف لمعادلة الموجة الشّعاعية ننتقل مباشرة لدراسة هذه المعادلات من أجل نوعين من العناصر في **(2-D)**، العناصر المثلثية والعناصر المستطيلة.

5-3-2. العناصر المثلثية:

ذكرنا في الفصل الثالث عناصر تُعرف باسم عناصر ***Whitney*** نُذكّر بها هنا، ثمّ نتابع دراستنا في حل معادلات ماكسويل باستخدام مثل هذه العناصر.

ليكن لدينا المثلث المُوضح بالشّكل(5-7) والمنسوب إلى جملة الإحداثيات المعمّمة **(OXY)**، حيث تأخذ رؤوسه الإحداثيات التالية: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$، وتأخذ أضلاعه الأرقام:

رقم الضلع	العقدة(1)	العقدة(2)	طول الضلع
1	**1**	**2**	l_1
2	**2**	**3**	l_2
3	**3**	**1**	l_3

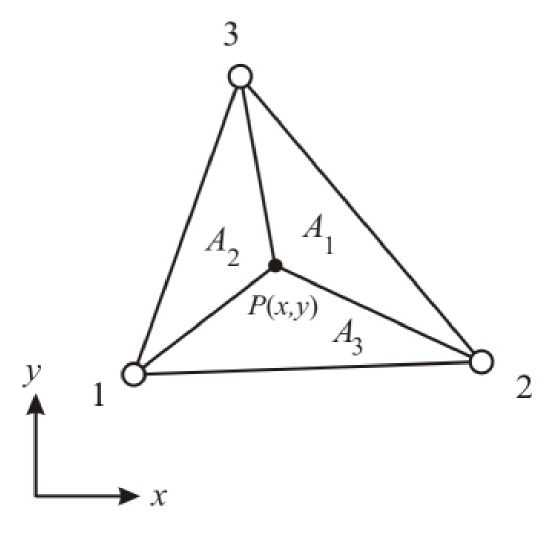
وجدنا في الفصل الثالث أنّ دوال قاعدة أضلاع المثلث تُعطى بدلالة إحداثيّات المساحة بالعلاقة:

$$\overrightarrow{W_1^{(e)}} = \overrightarrow{N_{12}^{(e)}} = l_{12}\left(\overrightarrow{\xi_1^{(e)}}\nabla\overrightarrow{\xi_2^{(e)}} - \overrightarrow{\xi_2^{(e)}}\nabla\overrightarrow{\xi_1^{(e)}}\right)$$
$$\overrightarrow{W_2^{(e)}} = \overrightarrow{N_{23}^{(e)}} = l_{23}\left(\overrightarrow{\xi_2^{(e)}}\nabla\overrightarrow{\xi_3^{(e)}} - \overrightarrow{\xi_3^{(e)}}\nabla\overrightarrow{\xi_2^{(e)}}\right)$$
$$\overrightarrow{W_3^{(e)}} = \overrightarrow{N_{31}^{(e)}} = l_{31}\left(\overrightarrow{\xi_3^{(e)}}\nabla\overrightarrow{\xi_1^{(e)}} - \overrightarrow{\xi_1^{(e)}}\nabla\overrightarrow{\xi_3^{(e)}}\right)$$

وتحقق: $\nabla.\overrightarrow{W_k^{(e)}} = 0 \quad ; k = 1,2,3$ وهذا يعني أنّ دوال قاعدة الأضلاع ذات تباعد حر وتحقق:

$$\overrightarrow{W_1^{(e)}}.\overrightarrow{t_1}|_{edge\,(1)} = 1,\ \ \overrightarrow{W_1^{(e)}}.\overrightarrow{t_j}|_{edge\,(j\neq1)} = 0$$

وتكمن أهمية هذا في إثبات استمرار المركبة المماسيّة للحقل على محيطات العناصر، وإمكانية تغير المركبة الناظمية.



الشّكل(5-7) إحداثيات المساحة

تمرين:

أثبت أنّه يُمكن إيجاد عناصر المصفوفتين $K_{\Delta}^{(e)}, K^{(e)}$ باستخدام العلاقات:

$$K_{\Delta,nm}^{e} = \frac{1}{\mu_r^e}\frac{l_n^{(e)} l_m^{(e)}}{4(\Delta^e)^3} D_n^{(e)} D_m^{(e)} \quad \ldots(70-5)$$

$$K_{nm}^{e} = \frac{l_n^{(e)} l_m^{(e)}}{16\left(A^{(e)}\right)^3} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) \quad \ldots(71-5)$$

حيث:

$$I_1 = A_n^{(e)} A_m^{(e)} + C_n^{(e)} C_m^{(e)} \quad \ldots(72-5)$$

$$I_2 = \frac{1}{\Delta^e} (C_n^{(e)} D_m^{(e)} + C_m^{(e)} D_n^{(e)}) \iint_{\Omega^e} x dx dy \quad \ldots(73-5)$$

$$I_3 = \frac{1}{\Delta^e} (A_n^{(e)} B_m^{(e)} + A_m^{(e)} B_n^{(e)}) \iint_{\Omega^e} y dx dy \quad \ldots(74-5)$$

$$I_4 = \frac{1}{\Delta^e} B_n^{(e)} B_m^{(e)} \iint_{\Omega^e} y^2 dx dy \quad \ldots(75-5)$$

$$I_5 = \frac{1}{\Delta^e} D_n^{(e)} D_m^{(e)} \iint_{\Omega^e} x^2 dx dy \quad \ldots(76-5)$$

$$A_n^{(e)} = a_i^e b_j^e - a_j^e b_i^e \quad \ldots(77-5)$$

$$B_n^{(e)} = c_i^e b_j^e - c_j^e b_i^e \quad \ldots(78-5)$$

$$C_n^{(e)} = a_i^e c_j^e - a_j^e c_i^e \quad \ldots(79-5)$$

$$D_n^{(e)} = -B_n^{(e)} \quad \ldots(80-5)$$

حيث يُشير الدليلان السفليان $\boldsymbol{i, j}$ على أرقام العقد في حين يستخدم الدليلان $\boldsymbol{n, m}$ مع أرقام الأضلاع.

الإثبات:

ذكرنا في العلاقة(5−15) أنّه يُمكن التعبير عن إحداثيات المساحة بالشّكل:

$$\xi_i^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_i^e + b_i^e x + c_i^e y)$$

وذلك من أجل: $c_i^e = x_{ki}^e$ ، $b_i^e = x_{jk}^e$ ، $a_i^e = x_j y_k - x_k y_j$

ومنه نجد أنّ: $\nabla \overrightarrow{W_i^{(e)}} = \frac{1}{2A^{(e)}} (b_i^e, c_i^e, 0)$

لكن: $\overrightarrow{W_n^{(e)}} = l_k^{(e)} (\xi_i^{(e)} \nabla \xi_j^{(e)} - \xi_j^{(e)} \nabla \xi_i^{(e)})$

$W_n^{(e)}$ دالة الشّكل المرتبطة بالضلع $\boldsymbol{n}$ من العنصر $\boldsymbol{e}$، $l_n^{(e)}$ طول الضلع $\boldsymbol{n}$ في العنصر $\boldsymbol{e}$.

$\xi_i^{(e)}; i = 1,2,3$ إحداثيات مساحة العنصر $\boldsymbol{e}$.

تُشير $\boldsymbol{n}$ إلى رقم الضلع، في حين يشير الدليلين $\boldsymbol{i, j}$ على رقمي العقدتين المحددتين لهذه الضلع.

نُبدّل إحداثيات المساحة بعبارة دالة الشّكل فنجد:

$$W_n^{(e)} = l_n^{(e)}\left(\xi_i^{(e)}\nabla\xi_j^{(e)} - \xi_j^{(e)}\nabla\xi_i^{(e)}\right)$$

$$W_n^{(e)} = \frac{l_n^{(e)}}{\left(2A^{(e)}\right)^2}\left[(a_i^e + b_i^e x + c_i^e y)\left(b_j^e, c_j^e, 0\right) - \left(a_j^e + b_j^e x + c_j^e y\right)(b_i^e, c_i^e, 0)\right]$$

$$W_n^{(e)} = \frac{l_n^{(e)}}{\left(2A^{(e)}\right)^2}\left[\left(a_i^e b_j^e - a_j^e b_i^e\right) + \left(c_i^e b_j^e - c_j^e b_i^e\right)y, \left(c_j^e a_i^e - c_i^e a_j^e\right) + \left(c_j^e b_i^e - c_i^e b_j^e\right)x\right]$$

$$W_n^{(e)} = \frac{l_n^{(e)}}{\left(2A^{(e)}\right)^2}\left[A_n^{(e)} + B_n^{(e)}y, C_n^{(e)} + D_n^{(e)}x\right]$$

حيث تُعطى: $D_n^{(e)}, C_n^{(e)}, B_n^{(e)}, A_n^{(e)}$ بالعلاقات: (5−77)، (5−78)، (5−79)،(5−80) على الترتيب.

وهكذا يُمكن أن نوجد المقدار:

$$\nabla \times \overrightarrow{W_n^{(e)}} = \frac{l_n^{(e)}}{\left(2A^{(e)}\right)^2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_n^{(e)} + B_n^{(e)}y & C_n^{(e)} + D_n^{(e)}x & 0 \end{vmatrix} = \frac{l_n^{(e)}}{\left(2A^{(e)}\right)^2}\left(0,0,2D_n^{(e)}\right)$$

وبالتالي:

$$\left(\nabla \times \overrightarrow{W_n^{(e)}}\right).\left(\nabla \times \overrightarrow{W_m^{(e)}}\right) = \frac{l_n^{(e)} l_m^{(e)}}{4(A^{(e)})^4} D_n^{(e)} D_m^{(e)}$$

نُبدّل في العلاقة(5−67) فنحصل بذلك على إثبات صحة العلاقة(5−70).

وبالمثل نجد أنّ:

$$\overrightarrow{W_n^{(e)}}.\overrightarrow{W_m^{(e)}} = \frac{l_n^{(e)} l_m^{(e)}}{\left(2A^{(e)}\right)^4}\left[\left(A_n^{(e)} + B_n^{(e)}y\right)\left(A_m^{(e)} + B_m^{(e)}y\right) + \left(C_n^{(e)} + D_n^{(e)}x\right)\left(C_m^{(e)} + D_m^{(e)}x\right)\right]$$

$$\overrightarrow{W_n^{(e)}}.\overrightarrow{W_m^{(e)}} = \frac{l_n^{(e)} l_m^{(e)}}{\left(2A^{(e)}\right)^4}\left[\left(A_n^{(e)} A_m^{(e)} + C_n^{(e)} C_m^{(e)}\right) + \left(A_n^{(e)} B_m^{(e)} + A_m^{(e)} B_n^{(e)}\right)y\right.$$
$$\left. + \left(C_n^{(e)} D_m^{(e)} + C_m^{(e)} D_n^{(e)}\right)x + B_n^{(e)} B_m^{(e)} y^2 + D_n^{(e)} D_m^{(e)} x^2\right]$$

بالتبديل في العلاقة(5−68) نحصل على صحة التكامل(5−71).

أمّا عن طريقة تجميع معادلات العناصر فتتم بأسلوب مماثل تماماً لذاك المتبع في حالة عناصر قاعدة العقد، إلا أنّه في هذه الحالة ستكون كل ضلع مشتركة بين عنصرين داخل المنطقة، وتنتمي إلى عنصر وحيد إن كانت على محيطها، مما يجعل المصفوفة المعمّمة للجملة متناثرة أكثر مما هي عليه في حالة عناصر قاعدة العقد، إلا أنّه يزيد في الوقت نفسه من عدد المجاهيل.

5-3-3. العناصر المستطيلة:

ذكرنا في الفصل الثالث(تعريف(3-2)) أنّه يُمكن الانتقال من جملة الإحداثيات المركزية إلى جملة الإحداثيات المعمّمة باستخدام التحويل:

$$B(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta) X_i$$

حيث أنّ N_i هي دوال الإستيفاء من أجل المربع ثنائي الواحدة في المستوي وتُعطى بالعلاقات(3-50):

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\,\xi_i)(1 + \eta\,\eta_i)$$

واستنتجنا فيما بعد أنّ دوال قاعدة أضلاع هذا المربع تُعطى بدلالة الإحداثيات المركزية بالعلاقات:

$$\overrightarrow{W_1^0} = \frac{1}{4}(1-\eta,0)^T \quad \overrightarrow{W_3^0} = \frac{1}{4}(0,1-\xi)^T$$
$$\overrightarrow{W_2^0} = \frac{1}{4}(1+\eta,0)^T \quad \overrightarrow{W_4^0} = \frac{1}{4}(0,1+\xi)^T$$

وأنّه يُمكننا وببساطة إيجاد دوال قاعدة الأضلاع بدلالة الإحداثيات المعمّمة من خلال العلاقة:

$$\overrightarrow{w_j} = {J_B}^{-1}\overrightarrow{W_j^0}$$

حيث أنّ J هي مصفوفة جاكوبي للتحويل B وتُعطى بالعلاقة:

$$[J_B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

فإذا كانت المنطقة المدروسة هي مربع الواحدة ولنفرض أنّنا قمنا بتجزئة هذه المنطقة إلى مجموعة من المستطيلات $\mathbf{R^e}$ بحيث تكون أضلاعها موازية للمحاور الإحداثية، وأبعادها h_x, h_y.

لنأخذ إحدى المستطيلات $\mathbf{R^e}$ المنسوبة إلى جملة إحداثية موضعية مبدؤها النقطة $A = (x_0, y_0)$ ولنحدد دوال قاعدة الأضلاع المرتبطة بها بدلالة دوال قاعدة الأضلاع في جملة الإحداثيات الطبيعية.

بما أنّ دالة التحويل بين العنصر المرجعي(المربع ثنائي الواحدة) والعنصر $\mathbf{R^e}$ هي دالة خطية فمن الواضح أنّها تُعطى بالشّكل:

$$(x,y) = B(\xi,\eta) = (x_0 + h_x\xi, y_0 + h_y\eta) \qquad \text{(81-5)...}$$

ونظراً لكون دالة التحويل خطية فإن هذا يجعل الحسابات بسيطة وبالتالي يُمكن إنجازها يدوياً وفيما عدا ذلك تكون التكاملات في العبارات((5-67)-(5-69)) غاية في الصعوبة لذا نلجأ حينها إلى طرق تكامل عددية كطريقة غاوص التربيعية.

من أجل التحويل الخطي B أعلاه تكون مصفوفة تحويل جاكوبي:

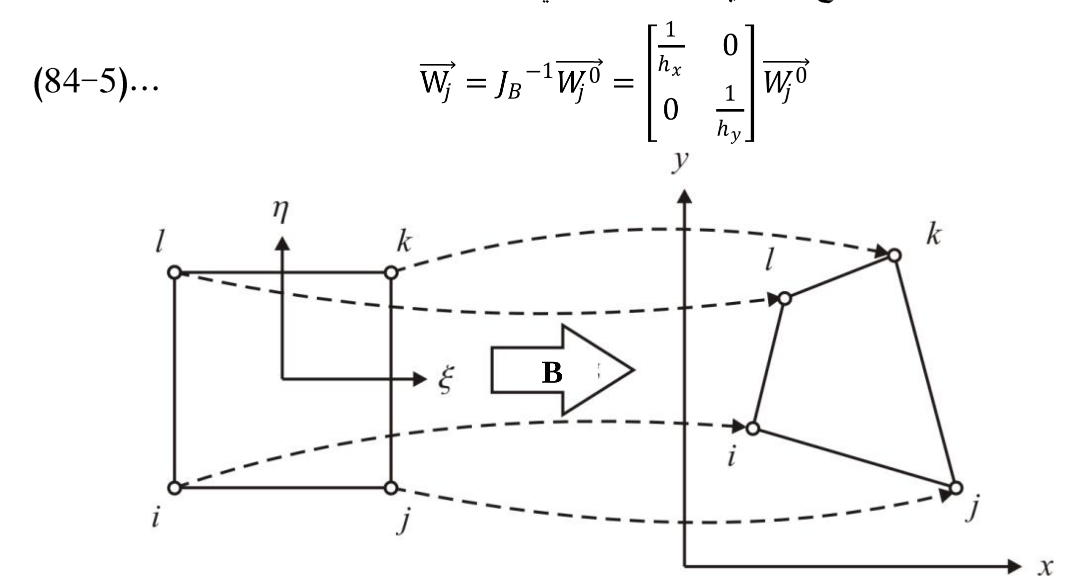
$$J_B = \begin{bmatrix} h_x & 0 \\ 0 & h_y \end{bmatrix} \qquad \text{(82-5)...}$$

بالتلي فإن مقلوبها J_B^{-1} يُعطى بالشّكل:

$$J_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y} \end{bmatrix} \quad (83-5)...$$

ومنه نجد أنّ دوال قاعدة أضلاع متوازي المستطيلات هي:

$$\overrightarrow{W_j} = J_B^{-1}\overrightarrow{W_j^0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y} \end{bmatrix}\overrightarrow{W_j^0} \quad (84-5)...$$



الشّكل(5-8) دالة تحويل المربع ثنائي الواحدة إلى مضلع رباعي

فمثلاً تكون $\overrightarrow{W_1}$:

$$\overrightarrow{W_1} = J_B^{-1}\overrightarrow{W_1^0} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{1}{h_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y} \end{bmatrix}(1-\eta,0)^T = \frac{1}{4h_x}(1-\eta,0)^T$$

وبالمثل نكتب عنصر المساحة بدلالة جملة الإحداثيات الطبيعية $\xi\eta$:

$$dS = dxdy = |\det(J)|d\xi d\eta \quad (85-5)...$$

وذكرنا في الفصل الثالث أنّه من أجل أي دالة اختيارية $\boldsymbol{f}$ يكون:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1}\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_z} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \left(\frac{1}{h_x}\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{1}{h_y}\frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{1}{h_z}\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^{\mathrm{T}} \quad (86-5)...$$

ننتقل الآن لحساب بعض من عناصر المصفوفتين $[A^{(e)}]$ و $[B^{(e)}]$ أما باقي العناصر فيتمُّ إيجادها بطريقة مماثلة تماماً:

$$\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{W_1^{(e)}} = \overrightarrow{\nabla_t} \times J_B^{-1}\overrightarrow{W_1^0} = \frac{1}{4h_x}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{h_x}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{1}{h_y}\frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ (1-\eta) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4h_xh_y}(0,0,1)$$

$$\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{W_2^{(e)}} = \overrightarrow{\nabla_t} \times J_B^{-1}\overrightarrow{W_2^0} = \frac{1}{4h_x}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{h_x}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{1}{h_y}\frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ (1+\eta) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4h_xh_y}(0,0,-1)$$

وبالمثل:

$$\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{W_3^{(e)}} = \frac{1}{4h_xh_y}(0,0,-1) \quad , \quad \overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{W_4^{(e)}} = \frac{1}{4h_xh_y}(0,0,1)$$

وبالتالي:

$$\iint_{\Omega^e} \left(\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{W_1^{(e)}}\right).\left(\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{W_1^{(e)}}\right) dxdy = \frac{1}{16{h_x}^2{h_y}^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |\det[J_B]| d\xi d\eta = \frac{1}{4h_xh_y}$$

وبالطريقة ذاتها نجد أنّ:

$$\iint_{\Omega^e} \left(\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{W_1^{(e)}}\right).\left(\overrightarrow{\nabla_t} \times \overrightarrow{W_2^{(e)}}\right) dxdy = \frac{-1}{16{h_x}^2{h_y}^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |\det[J_B]| d\xi d\eta = \frac{-1}{4h_xh_y}$$

نتابع بنفس الطريقة فنجد أنّ المصفوفة $K_\Delta^{(e)}$ تُعطى بالشّكل:

$$K_\Delta^{(e)} = \frac{1}{4h_xh_y\mu_r^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أمّا من أجل المصفوفة $^{(e)}$ فنجد أنّ:

$$\iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_1^{(e)}}.\overrightarrow{W_1^{(e)}} dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(J_B^{-1}\overrightarrow{W_1^0}.J_B^{-1}\overrightarrow{W_1^0})|\det[J_B]| d\xi d\eta$$
$$= \frac{h_xh_y}{16{h_x}^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-\eta)^2 d\xi d\eta = \frac{h_y}{16h_x}\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{h_y}{3h_x}$$

$$\iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_1^{(e)}}.\overrightarrow{W_2^{(e)}} dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(J_B^{-1}\overrightarrow{W_1^0}.J_B^{-1}\overrightarrow{W_2^0})|\det[J_B]| d\xi d\eta$$
$$= \frac{h_xh_y}{16{h_x}^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1-\eta)(1+\eta) d\xi d\eta = \frac{h_y}{16h_x}\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{h_y}{6h_x}$$

$$\iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_2^{(e)}}.\overrightarrow{W_2^{(e)}} dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(J_B^{-1}\overrightarrow{W_2^0}.J_B^{-1}\overrightarrow{W_2^0})|\det[J_B]| d\xi d\eta$$
$$= \frac{h_xh_y}{16{h_x}^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+\eta)^2 d\xi d\eta = \frac{h_y}{16h_x}\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{h_y}{3h_x}$$

$$\iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_3^{(e)}}.\overrightarrow{W_3^{(e)}} dxdy = \frac{h_x}{3h_y} , \iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_4^{(e)}}.\overrightarrow{W_4^{(e)}} dxdy = \frac{h_x}{6h_y}$$

$$\iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_3^{(e)}}.\overrightarrow{W_4^{(e)}} dxdy = \frac{h_x}{6h_y}$$

في حين تكون عناصر المصفوفة الأخرى معدومة أي:

$$\iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_1^{(e)}}.\overrightarrow{W_3^{(e)}}dxdy = \iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_1^{(e)}}.\overrightarrow{W_4^{(e)}}dxdy = 0$$

$$\iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_2^{(e)}}.\overrightarrow{W_3^{(e)}}dxdy = \iint_{\Omega^e} \overrightarrow{W_2^{(e)}}.\overrightarrow{W_4^{(e)}}dxdy = 0$$

وبالتالي:

$$K^{(e)} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \frac{-2h_y}{h_x} & \frac{-h_y}{h_x} & 0 & 0 \\ \frac{-h_y}{h_x} & \frac{-2h_y}{h_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2h_x}{h_y} & \frac{-h_x}{h_y} \\ 0 & 0 & \frac{-h_x}{h_y} & \frac{-2h_x}{h_y} \end{bmatrix}$$

وبهذا نكون قد أوجدنا حلاً لمعادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية في **(2-D)** باستخدام دوال قاعدة الأضلاع حيث أوضحنا الخطوات التفصيلية لحل مثل هذه المعادلات، أمّا عن طريقة تجميع معادلات العناصر وحلها فإنّها مماثلة لحالة دوال قاعدة العقد إلا أنّها تتم هنا بالنسبة للأضلاع لا العقد لذا نترك الأمثلة التطبيقية على هذه الحالة للفصل السادس.

الفصل السادس

حل معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية في (3-D)

6-1. مقدمة:

تحدّثنا في الفصلين السابقين عن استخدام طريقة العناصر المنتهية في إيجاد حل تقريبي لمعادلات ماكسويل في **(1-D)** و **(2-D)**، فاعتمدنا في حالة **(1-D)** على الشّكل السلّمي لمعادلة الموجة، واستخدمنا لحلّها بطريقة العناصر المنتهية دوال قاعدة العقد، فحصلنا من خلالها على حلول تقريبية جيدة، أمّا في حالة دراسة معادلات ماكسويل في **(2-D)**، وحيث يمكن التعبير عن معادلة الموجة بشكلين مختلفين، "الأول هو الشّكل السلّمي بدلالة مركبات الحقل في المستوي، والآخر هو الشّكل الشّعاعي"، كان لابدّ من استخدام نوعين من دوال القاعدة توافق الشّكلين المدروسين، فتعرّفنا على نوع جديدٍ من دوال القاعدة هو دوال قاعدة الأضلاع الموافق للشّكل الشّعاعي لمعادلة الموجة، ولعلّ أبرز ما تميزت به طريقة العناصر المنتهية عن غيرها من الطرق أنّها استطاعت من خلال استخدام دوال قاعدة الأضلاع تقديم حلول لكثير من المسائل السلّمية أو الشّعاعيّة ذات الصيغ التكاملية التي يصعب التعامل معها في حالة الأوساط غير المتجانسة، من هنا نخصّص هذا الفصل من أطروحتنا لحل معادلة الموجة بشكلها الشّعاعي التالي في **(3-D)** باستخدام طريقة العناصر المنتهية:

$$\vec{\nabla} \times (\frac{1}{\mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{E}) - k_0^2 \varepsilon_r \vec{E} = \vec{F} \qquad \text{(1-6)...}$$

حيث:

$\vec{F}$: دالة كثافة التيار و $\vec{E}$: شعاع الحقل الكهربائي.

μ_r: ثابت النفاذية المغناطيسية النسبية للوسط.

ε_r: ثابت السماحية الكهربائية النسبية للوسط.

k_0: طول موجة الفضاء الحرّ (الخلاء).

وننوّه في البداية إلى أنّ السبب الرّئيسيّ لظهور دوال قاعدة الأضلاع في معالجة معادلة الموجة هو أنّ استخدام دوال قاعدة العقد في تحليل معادلة الموجة الشّعاعيّة($6-1$) غالباً ما يؤدي إلى ما يعرف باسم الحلول الزائفة (***Spurious Solutions***) (الحلول غير الفيزيائية) والتي يقصد بها تلك الحلول العددية التي لا تتوافق مع حالة فيزيائية معيّنة، ونذكر مثالاً على ذلك أنّه لدى استخدام دوال قاعدة العقد في حل مسألة القيم الذّاتية الممثلة بجملة من المعادلات الخطية من الشّكل:

$$[A]\{\vec{E}\} = k_0^2[B]\{\vec{E}\}$$

تحقق الشروط الحدّيّة: $\hat{n} \times \vec{E} = 0$ على المحيط (حيث $\hat{n}$ شعاع واحدة الناظم على السطح)

نجد أنّه يوجد عدد غير منتهٍ من الدّوال العددية ϕ التي تكون قيمتها معدومة على محيط المنطقة المدروسة وتحقق أن $\vec{E} = -\nabla\emptyset \neq 0$.

ولأنّ $\vec{F} = 0$ هنا فإنّنا نحصل عند التبديل في($6-1$) على مسألة القيم الذاتية:

$$-\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r}\nabla \times (\nabla\emptyset)\right) = k_0^2\varepsilon_r\nabla\emptyset$$

وبما أن: $\nabla \times (\nabla\emptyset) = 0$ فإن هذا يقتضي أن يكون الطّرف الأيمن في العلاقة السابقة معدوماً، وحيث لا يمكن تحقق ذلك إلا إذا كانت القيمة الذاتية $k_0 = 0$، فهذا يعني وجود دالة شعاعية ذاتية مقابلة للقيمة الذاتية $k_0 = 0$ وحيث أنّ هذا غير ممكن فيزيائياً فإن هذا الحل يعتبر من الحلول الزائفة (عدد الموجة معدوم والحقل الكهربائي غير معدوم) ويعود السبب في ظهور مثل هذه الحلول كما ذكرنا آنفاً إلى استخدام دوال قاعدة العقد في حل معادلة الموجة الشّعاعيّة لذا نعمد في دراستنا المقبلة إلى استخدام دوال قاعدة الأضلاع في تجزئة المنطقة.

6-2. الخطوات الأساسية لحل معادلات ماكسويل في (3-D):

لابدّ وقبل الخوض في تفاصيل خطوات حل معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية في الفراغ من أن نُوجد حدّ الباقي الناتج عن تبديل الحلّ التّقريبي المفروض في المعادلة التفاضلية($6-1$)، فبفرض أن $E_i^{(e)}$ هي القيمة المتوسطة للحقل المماس عند الضلع ***i*** من العنصر ***e*** المؤلف من ***n*** ضلعاً، وبفرض $\overrightarrow{W_i^{(e)}}$ دالة القاعدة المرتبطة بالضلع ***i*** من العنصر ***e***، عندئذٍ يمكن وكما أسلفنا في الفصل الثّالث التعبير عن القيمة التقريبية لشعاع الحقل الكهربائي عند أي نقطة من نقاط العنصر ***e*** بالشّكل:

$$\overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}} = \sum_{i=1}^{n} E_i^{(e)}\overrightarrow{W_i^{(e)}} \qquad \ldots(2-6)$$

فإذا كانت المنطقة ***V*** مجزّأة إلى N_e عنصراً عندئذٍ يمكن التعبير عن القيمة التقريبية لشعاع الحقل الكهربائي عند أي نقطة من نقاط هذه المنطقة بالشّكل:

$$\vec{\tilde{E}} = \sum_{e=1}^{N_e} \overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}} = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n} E_i^{(e)} \overrightarrow{W_i^{(e)}} \qquad \text{(3–6)...}$$

نبدّل الحل التقريبي(6–3) في المعادلة الشّعاعيّة(6–1) فنحصل على حدّ الخطأ:

$$R(x,y,z) = \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{\tilde{E}}\right) - k_0^2 \varepsilon_r \vec{\tilde{E}} - \vec{F} \qquad \text{(4–6)...}$$

نأخذ الجداء الداخلي لدالة الوزن $\vec{T_i}$ في العلاقة(6–4) ونكامل على المنطقة $\boldsymbol{V}$:

$$\iiint_V \vec{T_i}.\left(\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{\tilde{E}}\right) - k_0^2 \varepsilon_r \vec{\tilde{E}} - \vec{F}\right) dV = 0 \qquad \text{(5–6)...}$$

بما أننا افترضنا أن العلاقة(6–5) محققة من أجل المنطقة $\boldsymbol{V}$ فإن هذا يقتضي تحققها من أجل أي منطقة جزئية $\boldsymbol{V^e}$ من $\boldsymbol{V}$ ومنه استناداً على طريقة كالاركين التي تكون فيها دوال الوزن هي دوال القاعدة المستخدمة في التقريب (أي $\vec{T_i} = \vec{W_i}$) نجد أنّه يمكن كتابة هذه العلاقة بالشّكل:

$$\sum_{e=1}^{N_e} \iiint_{V^e} \overrightarrow{W_i^{(e)}}.\left(\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}\right) - k_0^2 \varepsilon_r \overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}} - \vec{F}\right) dV = 0 \quad \boldsymbol{i=1,2,...,n} \qquad \text{(6–6)...}$$

ننتقل الآن لشرح خطوات الحل بطريقة العناصر المنتهية في **(3-D)** والموضحة في المخطط(4–1).

6–2–1. الشّكل الضَّعيف لمعادلة الموجة في مسألة الفجوة:

مسألة الفجوة:

لتكن $\boldsymbol{\Omega}$ منطقة محدودة من $\mathbb{R}^3$، يتألف محيطها $\partial\boldsymbol{\Omega}$ من مركبتين منفصلتين Γ ,$\boldsymbol{\Sigma}$ الشّكل(6–1)، ندعو مسألة إيجاد الحقل الكهربائي $\vec{E}$ المقابل للكثافة الكهربائية $\vec{F}$ المعرفة بالعلاقات الثلاث التالية بمسألة الفجوة:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E}\right) - k_0^2 \varepsilon_r \vec{E} = \vec{F} \qquad \text{(7–6)...}$$

شروط النقل الحدّيّة التّامة:

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad on\ \Gamma \qquad \text{(8–6)...}$$

شروط الممانعة الحدّيّة:

$$\frac{1}{\mu_r}\left(\nabla \times \vec{E}\right) \times \hat{n} - ik_0 \lambda \vec{E}_T = \vec{g} \quad on\ \Sigma \qquad \text{(9–6)...}$$

حيث أنّ:

$\vec{g}$: الحقل الشعاعي المماس للمحيط Σ.

$\hat{n}$: شعاع واحدة الناظم على السطح

$\vec{E}_T = \left(\hat{n} \times \vec{E}\right) \times \hat{n}$.

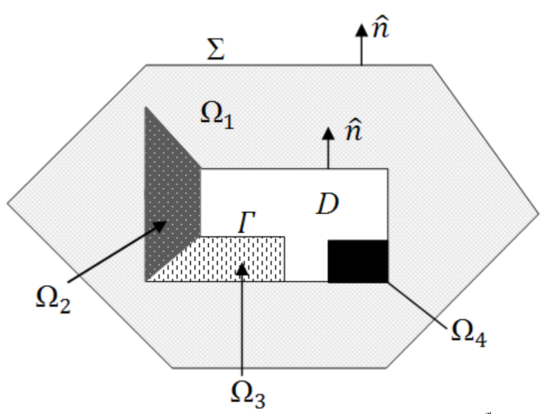
نُوجد تكامل الحد الأول من العلاقة (6–6) بالاستفادة من مبرهنة ستوكس(2–14) والعلاقتين:

$$\begin{aligned} &\nabla.\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\nabla \times \vec{a}\right).\vec{b} - \vec{a}.\left(\nabla \times \vec{b}\right) \\ &\vec{a}.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).\vec{c} \end{aligned} \qquad \text{(10–6)...}$$

نجد أنّ:

$$\iiint_{V^e} \overrightarrow{W_i^{(e)}}.\left(\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}\right) \vec{F}\right) dV = \iiint_{V^e} \frac{1}{\mu_r}\left(\nabla \times \overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}\right).\left(\nabla \times \overrightarrow{W_i^{(e)}}\right) dV + \int_{\partial V^e} \hat{n} \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}|_{\partial V^e}\right).\left(\hat{n} \times \overrightarrow{W_i^{(e)}}|_{\partial V^e}\right) \times \hat{n} dS$$

(11-6)...



الشّكل(6-1) مقطع عرضي في مسألة فجوة

وبالتالي تصبح العلاقة (6-6) بالشكل:

$$\Sigma_{e=1}^{N_e}\left(\iiint_{V^e} \frac{1}{\mu_r}\left(\nabla \times \overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}\right).\left(\nabla \times \overrightarrow{W_i^{(e)}}\right) dV + \int_{\partial V^e} \hat{n} \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}\right).\left(\hat{n} \times \overrightarrow{W_i^{(e)}}\right) \times \hat{n} dS - k_0^2 \varepsilon_r \iiint_{V^e} \overrightarrow{W_i^{(e)}}.\overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}} dV - \iiint_{V^e} \vec{\emptyset}.\vec{F}\, dV\right) = 0$$

(12-6)...

لكن $\partial V^e = \Sigma^e \cup \Gamma^e$.

ولكنّ الشرط ($\hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad on\ \Gamma^e$) لا يعطينا أي معلومات عن $\hat{n} \times (\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E})$، لذا نختار الدالة $\overrightarrow{W_i^{(e)}}$ بحيث تحقق: $\left(\hat{n} \times \overrightarrow{W_i^{(e)}}\right) \times \hat{n} = 0 \ \ on\ \Gamma^e$ ويكفي لهذا أن نختار الدالة $\overrightarrow{W_i^{(e)}}$ التي يكون من أجلها: $\left(\hat{n} \times \overrightarrow{W_i^{(e)}}\right) = 0 \ \ on\ \Gamma^e$.

نبدّل الشروط الحدّيّة في (6-12) فنجد أنّ:

$$\Sigma_{e=1}^{N_e}\left(\iiint_{V^e}\left[\left(\frac{1}{\mu_r}\left(\nabla \times \overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}\right).\left(\nabla \times \overrightarrow{W_i^{(e)}}\right) - k_0^2 \varepsilon_r \overrightarrow{W_i^{(e)}}.\overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}\right] dV\right) - ik_0 \Sigma_{e=1}^{N_e} \iint_{\Sigma^e} \lambda \left[\left(\hat{n} \times \overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}\right) \times \hat{n}\right].\left[\left(\hat{n} \times \overrightarrow{W_i^{(e)}}\right) \times \hat{n}\right] dS = \Sigma_{e=1}^{N_e}\left[\iiint_{V^e} \overrightarrow{W_i^{(e)}}.\vec{F}\, dV + \iint_{\Sigma^e} \vec{g}.\left[\left(\hat{n} \times \overrightarrow{W_i^{(e)}}\right) \times \hat{n}\right] dS\right.$$

(13-6)...

وهكذا نكون قد حصلنا على الشّكل الضّعيف لمعادلة الموجة الشّعاعيّة(6-7) باستخدام دوال قاعدة الأضلاع، ولهذا الشّكل أهمية كبيرة لأنّه يفيد في تخفيض مرتبة المشتقات من المرتبة الثانية حتي المرتبة الأولى.

ننتقل فيما يلي إلى الخطوة الثانية في طريقة العناصر المنتهية ألا وهي التجزئة، وسندرسها هنا في حالتين:

الحالة الأولى: تجزئة المنطقة إلى عناصر رباعية الوجوه.

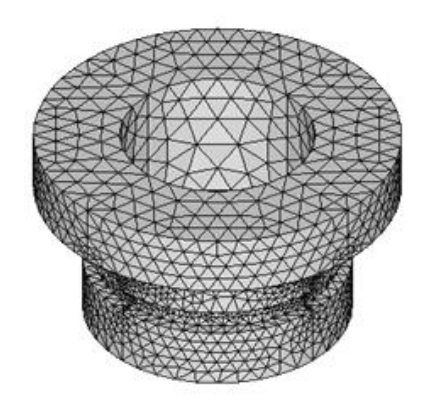
الحالة الثانية: تجزئة المنطقة إلى عناصر متوازية المستطيلات.

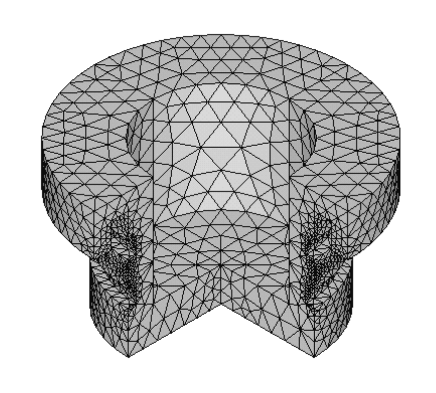
6-2-2. تجزئة المنطقة إلى عناصر رباعية الوجوه:

وتتألف من ثلاث خطوات أساسية هي:

6-2-2-1. الفصل:

وتتضمّن هذه الخطوة تجزئة المنطقة المدروسة إلى مجموعة من رباعيات الوجوه صغيرة الحجم تُدعى بالعناصر رباعية الوجوه (***tetrahedral elements***) كما في الشّكل(6-2).





الشّكل(6-2) منطقة مجزأة على رباعيات وجوه

6-2-2-2. الإحداثيات الطبيعية:

تُرقَّم أضلاع كل رباعي وجوه بالأرقام **1,2,…,6** ويأخذ المتغير عند هذه العقد القيم $E_1^{(e)}, E_2^{(e)}, \dots, E_6^{(e)}$.

كما تُستخدم إحداثيات الحجم للتعبير عن موضع أو قيمة المتغير عند كل نقطة من نقاط العنصر رباعي الوجوه كما رأينا في الفصل الرابع بالشّكل:

$$x = \sum_{i=1}^{6} x_i^e \xi_i^{(e)} \text{ ، } y = \sum_{i=1}^{6} y_i^e \xi_i^{(e)} \text{ ، } z = \sum_{i=1}^{6} z_i^e \xi_i^{(e)}$$

حيث تُعطى $\xi_i^{(e)}$ بالعلاقة:

$$\xi_i^{(e)} = \frac{1}{3V^e}(a_i^e + b_i^e x + c_i^e y + d_i^e z) \quad \dots(6\text{-}14)$$

وذلك من أجل:

$$a_i^e = x_j^e(y_k^e z_l^e - y_l^e z_k^e) + y_j^e(x_l^e z_k^e - x_k^e z_l^e) + z_j^e(x_k^e y_l^e - x_l^e y_k^e)$$

$$b_i^e = (y_l^e z_k^e - y_k^e z_l^e) + (y_j^e z_l^e - y_l^e z_j^e) + (y_k^e z_j^e - y_j^e z_k^e)$$

$$c_i^e = (x_k^e z_l^e - x_l^e z_k^e) + (x_l^e z_j^e - x_j^e z_l^e) + (x_j^e z_k^e - x_k^e z_j^e)$$
$$d_i^e = (x_l^e y_k^e - x_k^e y_l^e) + (x_j^e y_l^e - x_l^e y_j^e) + (x_k^e y_j^e - x_j^e y_k^e)$$

ويتمّ الحصول على $(\xi_i^{(e)}; i = 1,2,3,4)$ بتبديل دوري للأدلة ***(i, j, k ,l)***.

6-2-2-3. صيغة العنصر:

نُوجد في هذه المرحلة مصفوفة كل عنصر بدلالة جملة الإحداثيات الموضعية المنسوب إليها ويتم ذلك وفق الآتي:

نختار من أجل كل عنصر ***e*** تمثيلاً خطياً للمتغير $\overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}$ معرفاً وفق العلاقة:

$$\overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}(x,y) = \sum_{i=1}^{6} E_i^{(e)} \overrightarrow{W_i^{(e)}} \qquad (15-6)...$$

حيث أنّ: $E_1^{(e)}$ و $E_2^{(e)}$ و...و $E_6^{(e)}$ هي القيمة المتوسطة للحقل المماس عند الضلع ***i*** من العنصر ***e***.

نبدل(6-15) في الشّكل الضَّعيف لمعادلة الموجة الشّعاعيّة(6-13) فنحصل على جملة من المعادلات الخطيّة لها الشّكل:

$$\sum_{e=1}^{N_e}[A^{(e)}]\{E^{(e)}\} - k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e}[B^{(e)}]\{E^{(e)}\} - ik_0 \sum_{e=1}^{N_e}[D^{(e)}]\{E^{(e)}\} = \sum_{e=1}^{N_e}[C^{(e)}] + \sum_{e=1}^{N_e}[F^{(e)}] \qquad (16-6)...$$

حيث أنّ:

$$A_{nm}^{(e)} = \iiint_{V^e} \frac{1}{\mu_r}\left(\nabla \times \overrightarrow{W_n^{(e)}}\right).\left(\nabla \times \overrightarrow{W_m^{(e)}}\right) dV$$
$$B_{nm}^{(e)} = \iiint_{V^e} \varepsilon_r \overrightarrow{W_n^{(e)}}.\overrightarrow{W_m^{(e)}} dV$$
$$D_{nm}^{(e)} = \iint_{\Sigma^e} \lambda \left(\hat{n} \times \overrightarrow{W_n^{(e)}}\right) \times \hat{n} . \left(\hat{n} \times \overrightarrow{W_m^{(e)}}\right) \times \hat{n}\ dS$$
$$F_n^{(e)} = \iiint_{V^e} \overrightarrow{W_n^{(e)}}.\vec{F} dV$$
$$C_n^{(e)} = \iint_{\Sigma^e} g.\left(\hat{n} \times \overrightarrow{W_n^{(e)}}\right) \times \hat{n}\ dS$$

لكن ذكرنا سابقاً أنّ:

$$\overrightarrow{W_n^{(e)}} = \overrightarrow{W_{ij}^{(e)}} = l_n(\xi_i^{(e)}\overrightarrow{\nabla\xi_j^{(e)}} - \xi_j^{(e)}\overrightarrow{\nabla\xi_i^{(e)}}) \qquad (17-6)...$$

إذ يستخدم الدليل ***n*** للدلالة على رقم الضلع، في حين يستخدم l_n للدلالة على طول الضلع رقم ***n***.

نجد من العلاقة (6-14) أنّ تدرُّج $\xi_i^{(e)}$ هو:

$$\nabla\xi_i^{(e)} = \frac{1}{3V^e}(b_i^e, c_i^e, d_i^e) \qquad (18-6)...$$

نبدّل(6-14) و(6-18) في (6-17) ونجري الاختصارات اللازمة لنجد أنّ:

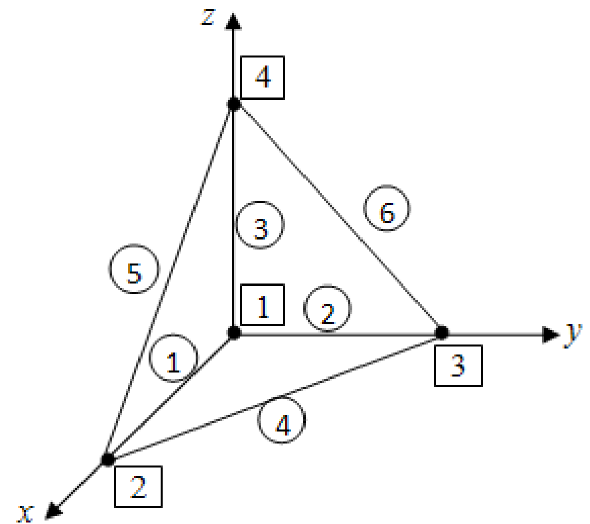
$$\overrightarrow{W_n^{(e)}} = \overrightarrow{W_{ij}^{(e)}} = \frac{(-1)^{n+1} l_n}{3V^e}\big(y(z_k^e - z_l^e) + z(y_l^e - y_k^e) + y_k^e z_l^e - y_l^e z_k^e\ ,$$
$$x(z_l^e - z_k^e) + z(x_k^e - x_l^e) + x_l^e z_k^e - x_k^e z_l^e\ ,$$
$$x(y_k^e - y_l^e) + y(x_l^e - x_k^e) + x_k^e y_l^e - x_l^e y_k^e\big) \qquad (19-6)...$$

حيث أنّ الدليلين ***k ,l*** يدلان على أرقام العقدتين اللتين تحددان الضلع رقم ($7-n$) من العنصر ***e*** على التّرتيب (الشّكل(6−3)).

فعلى سبيل المثال:

$$\overrightarrow{W_1^{(e)}} = \overrightarrow{W_{12}^{(e)}} = \frac{l_1}{3V^e}\big(y(z_3^e - z_4^e) + z(y_4^e - y_3^e) + y_3^e z_4^e - y_4^e z_3^e\,,\; x(z_4^e - z_3^e) + z(x_3^e - x_4^e) + x_4^e z_3^e - x_3^e z_4^e\,,\; x(y_3^e - y_4^e) + y(x_4^e - x_3^e) + x_3^e y_4^e - x_4^e y_3^e\big)$$

$$\overrightarrow{W_2^{(e)}} = \overrightarrow{W_{13}^{(e)}} = \frac{l_2}{3V^e}\big(y(z_2^e - z_4^e) + z(y_4^e - y_2^e) + y_2^e z_4^e - y_4^e z_2^e\,,\; x(z_4^e - z_2^e) + z(x_2^e - x_4^e) + x_4^e z_2^e - x_2^e z_4^e\,,\; x(y_2^e - y_4^e) + y(x_4^e - x_2^e) + x_2^e y_4^e - x_4^e y_2^e\big)$$



الشّكل(6−3) الأرقام المعمّمة للعقد والأضلاع

رقم الضلع	العقدة الأولى	العقدة الثانية
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	4	2
6	3	4

الجدول(6−1) الأرقام المعمّمة لعقد وأضلاع

بالعودة إلى العلاقة(6−19) نجد أن:

$$\nabla \times \overrightarrow{W_n^{(e)}} = \frac{2(-1)^{n+1} l_n}{3V^e}\left(x_l^e - x_k^e\,, y_l^e - y_k^e\,, z_l^e - z_k^e\right) \qquad (20-6)\ldots$$

ومنه:

$$A_{nm}^{(e)} = \iiint_{V^e} \frac{1}{\mu_r}\left(\nabla \times \overrightarrow{W_n^{(e)}}\right).\left(\nabla \times \overrightarrow{W_m^{(e)}}\right) dV = \frac{4(-1)^{n+m} l_n l_m}{9V^e \mu_r}\left(q_{7-n}\,, q_{7-m}\right) \qquad (21-6)\ldots$$

حيث أنّ $(q_i\,, q_j)$ يرمز إلى الجداء الداخلي لــ $q_i\,, q_j$ شعاعي توجيه الضلعين ***i, j***، فمثلاً نلاحظ من أجل الجدول (6−1) والشّكل(6−3) أن:

$$q_2 = (x_3^e - x_1^e\,, y_3^e - y_1^e\,, z_3^e - z_1^e) \qquad q_1 = (x_2^e - x_1^e\,, y_2^e - y_1^e\,, z_2^e - z_1^e)$$

أمّا المصفوفتان $[B^{(e)}]$ و $[F^{(e)}]$ فسوف نستعين بالعلاقة (3−82) لإيجاد عناصرهما كما في المثال (6−1).

6-2-2-4. التجميع والحل:

تأتي عملية تجميع معادلات العناصر في المرحلة التي تلي مباشرة كتابة المصفوفات العنصرية لعناصر المجموعة، وتتم بأخذ مجموع مصفوفات العناصر أي:

$$\sum_{e=1}^{N_e}[A^{(e)}]\{E^{(e)}\} - k_0^2 \sum_{e=1}^{N_e}[B^{(e)}]\{E^{(e)}\} - ik_0 \sum_{e=1}^{N_e}[D^{(e)}]\{E^{(e)}\} =$$
$$= \sum_{e=1}^{N_e}[C^{(e)}] + \sum_{e=1}^{N_e}[F^{(e)}]$$

يتم إنجاز هذه المرحلة بخطوات مماثلة تماماً لتلك المتبعة في حالة **(2-D)**، إلا أنّنا لن نخوض كثيراً في الحديث عنها، بل نترك المثال التّالي يوضّح لنا ذلك:

مثال(6-1):

أوجد باستخدام طريقة العناصر المنتهية حلاً لمعادلة الموجة:

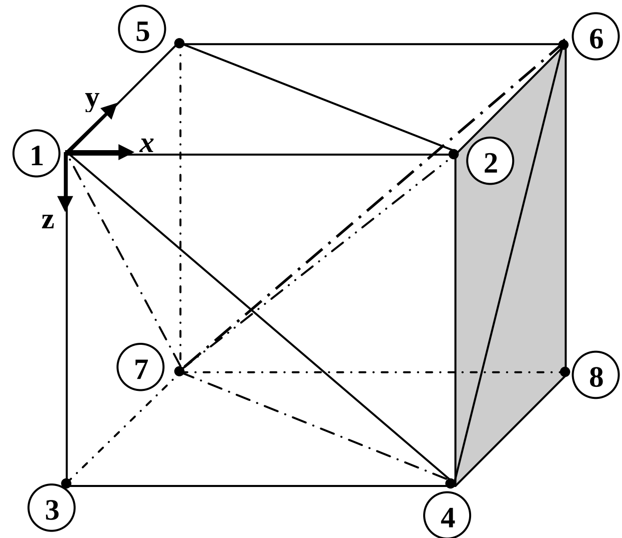
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - k_0^2 \vec{E} = \vec{F}$$

على مكعب الواحدة **V** الموضّح بالشّكل(4)، وذلك من أجل: $\vec{F} = (1,1,1)$، $k_0 = 0.25$.

الحل:

إذا فرضنا أنّه لا وجود للممانعة الكهربائية على سطح المنطقة **V**، عندئذٍ تكون التّكاملات السطحية الموجودة في العلاقة(6−16) جميعها معدومة، وبالتالي تؤول المعادلة (6−1) في هذه الحالة إلى الشّكل التالي:

$$[A^{(e)}]\{E^{(e)}\} - k_0^2[B^{(e)}]\{E^{(e)}\} = \sum_{e=1}^{N_e}[F^{(e)}]$$



الشّكل(6−4) مكعب الواحدة مجزأ إلى مجموعة من رباعيات الوجوه

كي نُوجد الحّل نبدأ بتجزئة المنطقة المدروسة إلى أربع من رباعيات الوجوه كما هو موضح بالشّكل(6−4)، بحيث تكون الأرقام الموضعية للعقد والأضلاع معطاة بالجداول التالية:

جدول الأرقام الموضعية للعقد:

أرقام العناصر	1	2	3	4
$n(1,e)$	3	1	2	4
$n(2,e)$	4	4	5	8
$n(3,e)$	1	2	7	6
$n(4,e)$	7	7	6	7

وليكن جدول الأرقام المعمّمة لأضلاع المكعب:

أرقام الأضلاع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$n_s(1,e)$	1	2	4	3	1	4	7	1	5	6	2	5	7	8	6	4	2	7	7
$n_s(2,e)$	2	4	3	1	4	7	1	5	6	2	5	7	8	6	4	8	7	6	3

بحيث تتوزع أرقام أضلاع كل عنصر بالشّكل:

e / s	1	2	3	4
1	3	5	11	16
2	4	1	17	15
3	19	7	10	6
4	5	2	12	14
5	6	6	9	13
6	7	17	18	18

أمّا إحداثيات رؤوس المكعّب فهي:

الأرقام المعمّمة للعقد	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	1	0	1	0	1	0	1
y_i	0	0	0	0	1	1	1	1
z_i	0	0	1	1	0	0	1	1

نقوم بإدخال هذه الجداول كما يلي:

```
X = {0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1};
Y = {0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1};
Z = {0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1};
NOfLocalNode[1] = {3, 1, 2, 4};
NOfLocalNode[2] = {4, 4, 5, 8};
NOfLocalNode[3] = {1, 2, 7, 6};
NOfLocalNode[4] = {7, 7, 6, 7};
NOfLocalEdge[1] = {3, 5, 17, 16};
NOfLocalEdge[2] = {4, 2, 12, 6};
NOfLocalEdge[3] = {5, 1, 18, 13};
NOfLocalEdge[4] = {6, 6, 9, 14};
NOfLocalEdge[5] = {7, 7, 10, 15};
NOfLocalEdge[6] = {19, 17, 11, 18};
nofEdge[1] = {1, 2, 4, 3, 1, 4, 7, 1, 5, 6, 2, 5, 7, 8, 6, 4, 2, 7, 7};
nofEdge[2] = {2, 4, 3, 1, 4, 7, 1, 5, 6, 2, 5, 7, 8, 6, 4, 8, 7, 6, 3};
n = 4; μr = 1; εr = 1; p = {1, 1, 1};
k0 = 0.25;
```

إحداثيات العقد

الأرقام الموضعية للعقد

الأرقام الموضعية للأضلاع

الأرقام الموضعية والمعممة لعقد الأضلاع

```
Do[Do[k[i_, e_] := NOfLocalNode[i][[e]], {i, 4}], {e, n}]
Do[Do[L[i_, e_] := NOfLocalEdge[i][[e]], {i, 6}], {e, n}]

Do[Do[x[i_, e_] := X[[k[i, e]]], {e, n}], {i, 4}];
Do[Do[y[i_, e_] := Y[[k[i, e]]], {e, n}], {i, 4}];
Do[Do[z[i_, e_] := Z[[k[i, e]]], {e, n}], {i, 4}];

Do[Do[xd1[i_, e_] := X[[nofEdge[1][[L[i, e]]]]], {e, n}], {i, 4}];
Do[Do[xd2[i_, e_] := X[[nofEdge[2][[L[i, e]]]]], {e, n}], {i, 4}];
Do[Do[yd1[i_, e_] := Y[[nofEdge[1][[L[i, e]]]]], {e, n}], {i, 4}];
Do[Do[yd2[i_, e_] := Y[[nofEdge[2][[L[i, e]]]]], {e, n}], {i, 4}];
Do[Do[zd1[i_, e_] := Z[[nofEdge[1][[L[i, e]]]]], {e, n}], {i, 4}];
Do[Do[zd2[i_, e_] := Z[[nofEdge[2][[L[i, e]]]]], {e, n}], {i, 4}];
```

فاصلة العقدة الأولى من الضلع i للعنصر e

طول الضلع i من العنصر e

$$LenEd_{e_,i_} := \sqrt{(xd1[i,e]-xd2[i,e])^2+(yd1[i,e]-yd2[i,e])^2+(zd1[i,e]-zd2[i,e])^2}$$

```
V[e_] :=
  1/3 Det[{{1, x[1, e], y[1, e], z[1, e]}, {1, x[2, e], y[2, e], z[2, e]},
     {1, x[3, e], y[3, e], z[3, e]}, {1, x[4, e], y[4, e], z[4, e]}}];
```

حجم العنصر e

شعاع الضلع رقم **1** من العنصر ***e***

```
q[1, e_] := {x[2, e] - x[1, e], y[2, e] - y[1, e], z[2, e] - z[1, e]};
q[2, e_] := {x[3, e] - x[1, e], y[3, e] - y[1, e], z[3, e] - z[1, e]};
q[3, e_] := {x[4, e] - x[1, e], y[4, e] - y[1, e], z[4, e] - z[1, e]};
q[4, e_] := {x[3, e] - x[2, e], y[3, e] - y[2, e], z[3, e] - z[2, e]};
q[5, e_] := {x[2, e] - x[4, e], y[2, e] - y[4, e], z[2, e] - z[4, e]};
q[6, e_] := {x[4, e] - x[3, e], y[4, e] - y[3, e], z[4, e] - z[3, e]};
```

المصفوفة **A** للعنصر ***e***

```
Ain = Table[0, {6}, {6}];
AAin = Table[0, {19}, {19}];
```

```
elementmatrix[e_, Ain_] := Module[{A = Ain, n, m}, Do[Do[A[[n, m]] =
    (-1)^(n+m)/(9 V[e] μr) LenEd[e,n] LenEd[e,m] q[7 - n, e].q[7 - m, e],
   {n, 6}], {m, 6}]; Return[A]]
```

```
Do[Print["A[", i, "]=", MatrixForm[elementmatrix[i, Ain]]], {i, 1, n}]
```

$$A[1]=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A[2]=\begin{pmatrix} 2 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 2 \end{pmatrix}$$

$$A[3]=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$A[4]=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

```
Mergeelementmatrix[EM_, eftab_, AAin_] := Module[{i, j, ii, jj, A = AAin, L = Length[eftab]},
   For[i = 1, i ≤ L, i ++, ii = eftab[[i]];
    For[j = 1, j ≤ L, j ++, jj = eftab[[j]]; A[[jj, ii]] = A[[ii, jj]] = EM[[i, j]]]];
   Return[A]];
```

```
Do[MM[e_] := Mergeelementmatrix[elementmatrix[e, Ain], Table[L[i, e], {i, 6}], AAin],
 {e, 1, n}]
```

المصفوفة **A**
الموسعة للعنصر ***e***

A=

$$ss = \sum_{i=1}^{n} N[MM[i]];\ Print[MatrixForm[ss]]$$

0.333333	0.	0.	0.	-0.471405	0.471405	0.	0.	0.	0.
0.	0.666667	0.	0.	0.942809	-0.471405	-0.471405	0.	0.	0.
0.	0.	0.666667	0.333333	-0.471405	-0.471405	-0.471405	0.	0.	0.
0.	0.	0.333333	0.666667	0.471405	-0.471405	0.	0.	0.	0.
-0.471405	0.942809	-0.471405	0.471405	3.33333	-1.33333	0.	0.	0.	0.
0.471405	-0.471405	-0.471405	-0.471405	-1.33333	2.66667	0.	0.	0.	0.
0.	-0.471405	-0.471405	0.	0.	0.	1.33333	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.333333	-0.333333
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-0.333333	1.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.471405	-0.942809
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	-0.333333
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	-0.471405	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.471405	0.	0.	0.	0.
0.57735	0.57735	0.	0.	0.	0.816497	-0.816497	0.	0.	-1.1547
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.471405
0.	0.	0.	0.333333	0.471405	0.	0.	0.	0.	0.

A=

0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.57735	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.57735	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.333333
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.471405
0.	0.	0.	-0.471405	0.	0.471405	0.816497	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	-0.816497	0.	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.471405	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
-0.942809	-0.333333	0.	0.	0.	0.	-1.1547	0.471405	0.
1.33333	0.471405	0.	0.	0.	0.	0.816497	0.	0.
0.471405	0.333333	0.	0.	0.	0.	0.57735	0.	0.
0.	0.	0.333333	0.	0.471405	-0.333333	0.	0.	0.
0.	0.	0.	0.666667	-0.471405	-0.333333	0.	0.471405	0.
0.	0.	0.471405	-0.471405	1.33333	-0.471405	0.	-0.666667	0.
0.	0.	-0.333333	-0.333333	-0.471405	0.666667	0.	0.	0.
0.816497	0.57735	0.	0.	0.	0.	4.	-0.816497	0.
0.	0.	0.	0.471405	-0.666667	0.	-0.816497	1.33333	0.
0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.333333

```
w = Table[Null, {6}];
w[[1]] = {1 - ξ3 - ξ4, ξ2, ξ2};    w[[2]] = {ξ3, 1 - ξ2 - ξ4, ξ3};
w[[3]] = {ξ4, ξ4, 1 - ξ2 - ξ3};    w[[4]] = √2 {-ξ3, ξ2, 0};
w[[5]] = √2 {-ξ4, 0, ξ2};
w[[6]] = √2 {0, -ξ4, ξ3};
```

مصفوفة تحويل جاكوبي
للعنصر ***e***

```
Jac[e_] := Table[{x[i, e] - x[4, e], y[i, e] - y[4, e], z[i, e] - z[4, e]}, {i, 3}];
Jâc[e_] := Inverse[Jac[e]];
Do[W[i_, e_] := Jâc[e].w[[i]], {i, 6}]
```

```
b0 = Table[0, {6}, {6}];
bmin = Table[0, {19}, {19}];
```

المصفوفة B للعنصر e

```
BMATRIX[e_, b0_] :=
 Module[{b = b0}, Do[Do[b[[i, j]] = N[∫_0^1 ∫_0^1 ∫_0^1 Det[Jac[e]] W[i, e].W[j, e] dξ2 dξ3 dξ4],
    {i, 6}], {j, 6}]; Return[b]]
```

```
Do[Print["b[", e, "]=", MatrixForm[BMATRIX[e, b0]]], {e, 4}]
```

$$b[1]=\begin{pmatrix} -1.16667 & 0.583333 & 0.583333 & -1.53206 & -1.53206 & 0. \\ 0.583333 & -0.833333 & -0.25 & 1.41421 & 0.824958 & -0.471405 \\ 0.583333 & -0.25 & -0.833333 & 0.824958 & 1.41421 & 0.471405 \\ -1.53206 & 1.41421 & 0.824958 & -3.66667 & -2.5 & 0.333333 \\ -1.53206 & 0.824958 & 1.41421 & -2.5 & -3.66667 & -0.333333 \\ 0. & -0.471405 & 0.471405 & 0.333333 & -0.333333 & -1.33333 \end{pmatrix}$$

$$b[2]=\begin{pmatrix} -0.666667 & -0.0833333 & 0.75 & -0.589256 & -1.06066 & -0.707107 \\ -0.0833333 & -0.666667 & 0.75 & 0.589256 & -0.707107 & -1.06066 \\ 0.75 & 0.75 & -2.5 & 0. & 3.18198 & 3.18198 \\ -0.589256 & 0.589256 & 0. & -1.66667 & -0.166667 & 0.166667 \\ -1.06066 & -0.707107 & 3.18198 & -0.166667 & -5.33333 & -4.16667 \\ -0.707107 & -1.06066 & 3.18198 & 0.166667 & -4.16667 & -5.33333 \end{pmatrix}$$

المصفوفة B

للعناصر الأربعة

$$b[3]=\begin{pmatrix} -0.5 & 0.166667 & -0.166667 & -0.589256 & -0.117851 & 0.353553 \\ 0.166667 & -1. & 0.333333 & 1.06066 & -0.117851 & -1.06066 \\ -0.166667 & 0.333333 & -1.16667 & -0.471405 & 0.942809 & 1.41421 \\ -0.589256 & 1.06066 & -0.471405 & -2. & 0.166667 & 1.5 \\ -0.117851 & -0.117851 & 0.942809 & 0.166667 & -1.33333 & -1. \\ 0.353553 & -1.06066 & 1.41421 & 1.5 & -1. & -3. \end{pmatrix}$$

$$b[4]=\begin{pmatrix} -0.833333 & 0.583333 & -0.25 & -1.41421 & -0.471405 & 0.824958 \\ 0.583333 & -1.16667 & 0.583333 & 1.53206 & 0. & -1.53206 \\ -0.25 & 0.583333 & -0.833333 & -0.824958 & 0.471405 & 1.41421 \\ -1.41421 & 1.53206 & -0.824958 & -3.66667 & -0.333333 & 2.5 \\ -0.471405 & 0. & 0.471405 & -0.333333 & -1.33333 & -0.333333 \\ 0.824958 & -1.53206 & 1.41421 & 2.5 & -0.333333 & -3.66667 \end{pmatrix}$$

B =

```
Do[MMB[e_] := Mergeelementmatrix[BMATRIX[e, b0], Table[L[i, e], {i, 6

ss2 = Sum[N[MMB[i]], {i, 1, n}];
```

المصفوفة F للعنصر e

```
fin = Table[0, {6}]; FMin = Table[0, {19}];
```

```
FMat[e_, fin_] := Module[{F = fin}, Do[F[[i]] =
    N[∫_0^1 ∫_0^1 ∫_0^1 Det[Jac[e]] W[i, e].p dξ2 dξ3 dξ4], {i, 6}]; Return[F]]
```

```
Do[Print["F[", e, "]=", MatrixForm[FMat[e, fin]]], {e, 4}]
```

$$F[1]=\begin{pmatrix} 0. \\ 1. \\ 0. \\ -1.41421 \\ 0. \\ 1.41421 \end{pmatrix} \quad F[3]=\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0. \\ 1.5 \\ 0.707107 \\ -1.41421 \\ -2.12132 \end{pmatrix}$$

المصفوفة F للعناصر

الأربعة

$$F[2]=\begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1. \\ -1.41421 \\ -2.12132 \\ -0.707107 \end{pmatrix} \quad F[4]=\begin{pmatrix} -1. \\ 1. \\ -1. \\ -2.82843 \\ 0. \\ 2.82843 \end{pmatrix}$$

```
MergeFMat[FMat_, eftab_, FMin_] := Module[{i, ii, F = FMin, L = Length[eftab]},
   For[i = 1, i ≤ L, i++, ii = eftab[[i]]; F[[ii]] = FMat[[i]]]; Return[F]];
```

```
Do[MF[e_] := MergeFMat[FMat[e, fin], Table[L[i, e], {i, 6}], FMin], {e, 1, 4}];
```

$$LF = \epsilon_r \sum_{e=1}^{n} MF[e];\ \text{Print}["F=", \text{MatrixForm}[LF]]$$

$$F = \begin{pmatrix} 1. \\ 0.5 \\ 0. \\ 1. \\ -0.5 \\ -1.82843 \\ -2.12132 \\ 0 \\ 0.70710 \\ -1.41421 \\ -2.12132 \\ 0. \\ -1. \\ -2.82843 \\ 0. \\ -1. \\ -0.207107 \\ 4.32843 \\ 1.41421 \end{pmatrix}$$

المصفوفة **F**

$$\text{LinearSolve}[ss - k_0^2\, ss2, LF]$$

الحل

{3.74891, -2.28588, -2.71659, -6.43215, -2.31761, -6.13321, -1.16523, -1.06581×10^{-14}, 2.87615, -6.45809, -7.49391, 3.74314, -1.29526, -9.49697, 0.143893, -0.920847, 1.36276, 6.68507, 11.2044}

ملاحظة(6-1):

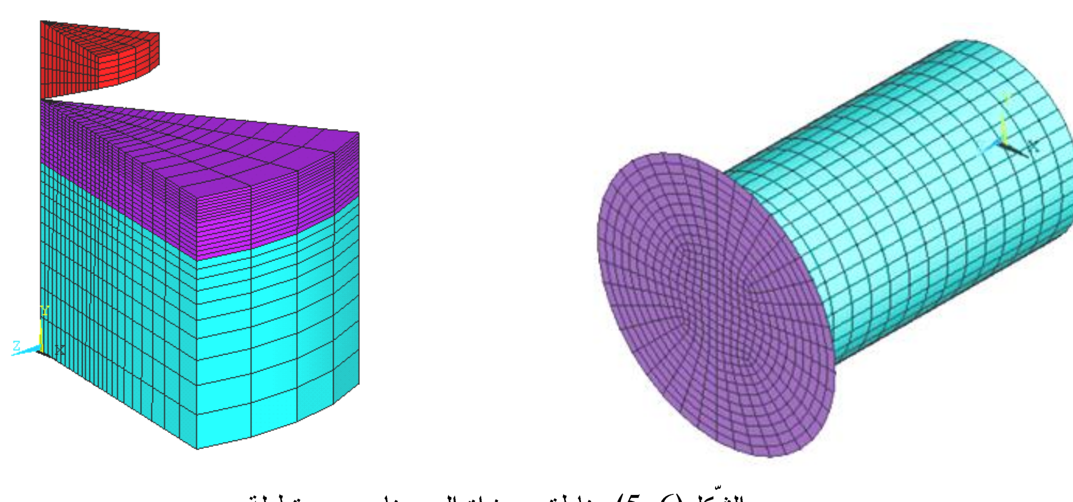
عند استخدام دوال قاعدة الأضلاع في طريقة العناصر المنتهية يكون عدد المعادلات الخطية الناتجة أكبر منه في حالة دوال قاعدة العقد، ويعود ذلك إلى أنّه عند استخدام دوال قاعدة الأضلاع تكون المجاهيل هي القيم المتوسطة للحقل المماس عند الأضلاع، في حين تكون المجاهيل في حالة دوال قاعدة العقد هي قيم الحقل عند العقد، ودائماً يكون عدد الأضلاع أكبر من عدد العقد، ففي المثال السابق نجد أنّ استخدام دوال قاعدة الأضلاع استلزم جملة مؤلفة من 19 معادلة (مقابلة لـــ 19 ضلعاً)، في حين يكون عدد المعادلات لو استخدمنا دوال قاعدة العقد 6 معادلات (مقابلة لـــ 6 عقد).

6-2-3. تجزئة المنطقة إلى عناصر لكل منها شكل متوازي مستطيلات:

وتتألف من ثلاث خطوات أساسية هي:

6-2-3-1. الفصل:

وتتضمن هذه الخطوة تجزئة المنطقة المدروسة إلى مجموعة من عناصر متوازية المستطيلات صغيرة الحجم تُدعى بالعناصر سداسية الوجوه (***hexarahedral element***) كما في الشّكل(6-5).



الشّكل(6-5) مناطق مجزاة إلى عناصر مستطيلة

6-2-3-2. الإحداثيات الطبيعية:

تُرقّم أضلاع كل متوازي مستطيلات بالأرقام **1,2,...,12** ويأخذ المتغير عند هذه العقد القيم $E_1^{(e)}, E_2^{(e)}, \dots, E_{12}^{(e)}$.

وذكرنا في فصل سابق أنّه يمكن الانتقال من الإحداثيات الطبيعية إلى الإحداثيات المعمّمة باستخدام التحويل: $B(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{8} N_i(\xi,\eta,\zeta)X_i$

حيث أنّ N_i هي دوال الإستيفاء من أجل المكعب ثنائي الواحدة في الفضاء ثلاثي الأبعاد وتُعطى بالعلاقات:

$$N_1(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad N_5(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$
$$N_2(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad N_6(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$
$$N_3(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \quad N_7(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$
$$N_4(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \quad N_8(\xi,\eta,\zeta)=\tfrac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

واستنتجنا فيما بعد أن دوال قاعدة الأضلاع تُعطى بدلالة الإحداثيات المعمّمة بالعلاقات:

$$\overrightarrow{W_1^0} = \frac{1}{8}((1-\eta)(1-\zeta),0,0)^T \quad \overrightarrow{W_7^0} = \frac{1}{8}(0,(1+\xi)(1-\zeta),0)^T$$
$$\overrightarrow{W_2^0} = \frac{1}{8}((1+\eta)(1-\zeta),0,0)^T \quad \overrightarrow{W_8^0} = \frac{1}{8}(0,(1+\xi)(1+\zeta),0)^T$$
$$\overrightarrow{W_3^0} = \frac{1}{8}((1-\eta)(1+\zeta),0,0)^T \quad \overrightarrow{W_9^0} = \frac{1}{8}(0,0,(1-\xi)(1-\eta))^T$$
$$\overrightarrow{W_4^0} = \frac{1}{8}((1+\eta)(1+\zeta),0,0)^T \quad \overrightarrow{W_{10}^0} = \frac{1}{8}(0,0,(1+\xi)(1-\eta))^T \quad (23\text{–}6)...$$
$$\overrightarrow{W_5^0} = \frac{1}{8}(0,(1-\xi)(1-\zeta),0)^T \quad \overrightarrow{W_{11}^0} = \frac{1}{8}(0,0,(1-\xi)(1+\eta))^T$$
$$\overrightarrow{W_6^0} = \frac{1}{8}(0,(1-\xi)(1+\zeta),0)^T \quad \overrightarrow{W_{12}^0} = \frac{1}{8}(0,0,(1+\xi)(1+\eta))^T$$

وأنه يمكننا ببساطة إيجاد دوال قاعدة الأضلاع بدلالة الإحداثيات المعمّمة من خلال العلاقة:

$$w_j = J^{-1}W_j^0 \quad (24\text{–}6)...$$

حيث أنّ J هي مصفوفة تحويل جاكوبي B وتُعطى بالعلاقة:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (25\text{–}6)...$$

6-2-3-3. صيغة العنصر:

نُوجد في هذه المرحلة مصفوفة كل عنصر وذلك بدلالة جملة الإحداثيات الموضعية المنسوب إليها ويتم ذلك وفق الآتي:

نختار من أجل كل عنصر $\boldsymbol{e}$ تمثيلاً خطياً للمتغير $\overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}$ معرفاً وفق العلاقة:

$$\overrightarrow{\tilde{E}^{(e)}}(x,y) = \sum_{i=1}^{12} E_i^{(e)}\overrightarrow{W_i^{(e)}} \quad (26\text{–}6)...$$

حيث أنّ: $E_1^{(e)}$ و $E_2^{(e)}$ و...و $E_{12}^{(e)}$ هي القيمة المتوسطة للحقل المماس عند الضلع $\boldsymbol{i}$ من العنصر $\boldsymbol{e}$.

نبدل(6–15) في الشّكل الضَّعيف لمعادلة الموجة الشّعاعيّة(6–13) فنحصل على جملة من المعادلات الخطية لها الشّكل:

$$\sum_{e=1}^{N_e}[A^{(e)}]\{E^{(e)}\} - k_0^2\sum_{e=1}^{N_e}[B^{(e)}]\{E^{(e)}\} - ik_0\sum_{e=1}^{N_e}[D^{(e)}]\{E^{(e)}\} = \sum_{e=1}^{N_e}[C^{(e)}] + \sum_{e=1}^{N_e}[F^{(e)}] \quad (27\text{–}6)...$$

مع العلم أنّ:

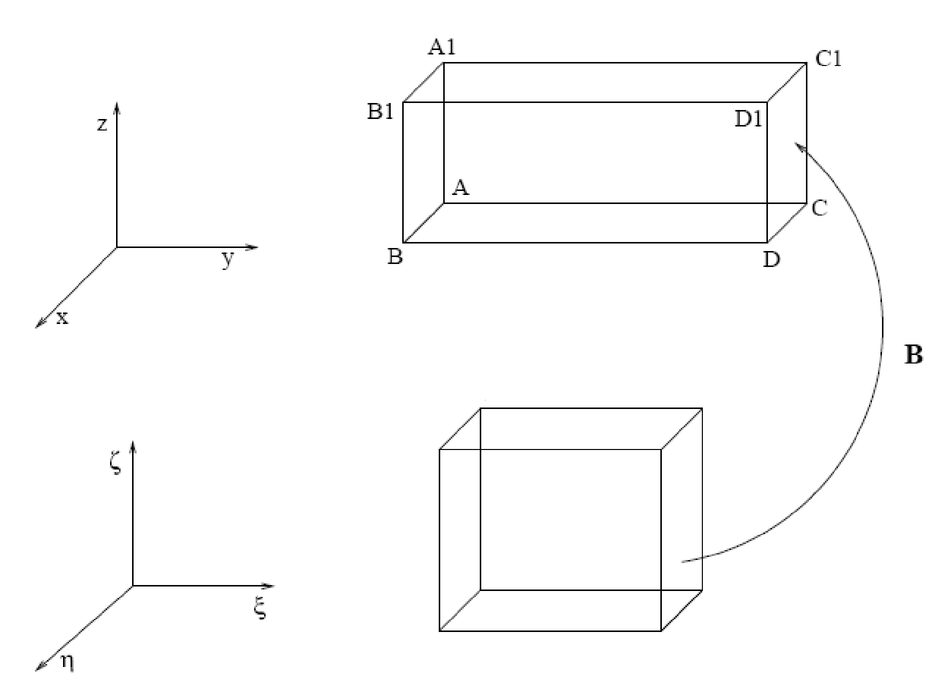
$$(28\text{–}6)... \quad A_{nm}^{(e)} = \iiint_{V^e}\frac{1}{\mu_r}\left(\nabla\times\overrightarrow{W_n^{(e)}}\right).\left(\nabla\times\overrightarrow{W_m^{(e)}}\right)dV$$

$$(29\text{–}6)... \quad B_{nm}^{(e)} = \iiint_{V^e}\varepsilon_r\overrightarrow{W_n^{(e)}}.\overrightarrow{W_m^{(e)}}dV$$

$$(30\text{–}6)... \quad D_{nm}^{(e)} = \iint_{\Sigma^e}\lambda\left(\hat{n}\times\overrightarrow{W_n^{(e)}}\right)\times\hat{n}.\left(\hat{n}\times\overrightarrow{W_m^{(e)}}\right)\times\hat{n}\ dS$$

$$(31-6)\ldots\quad F_n^{(e)} = \iiint_{V^e} \overrightarrow{W_n^{(e)}}.\vec{F}dV$$

$$(32-6)\ldots\quad C_n^{(e)} = \iint_{\Sigma^e} \vec{g}.\left(\hat{n} \times \overrightarrow{W_n^{(e)}}\right) \times \hat{n}\, dS$$



الشّكل(6-6) تابع التحويل من المكعب ثنائي الواحدة إلى متوازي مستطيلات أضلاعه موازية للمحاور الإحداثية

لنفرض أنّ المنطقة المدروسة هي المكعّب ثنائي الواحدة، وأنّنا قمنا بتجزئة هذه المنطقة إلى مجموعة من متوازيات المستطيلات $\mathbf{R^e}$ بحيث تكون أضلاعها موازية للمحاور الإحداثية، وأبعادها h_x, h_y, h_z.

ولنأخذ إحدى متوازيات الأضلاع $\mathbf{R^e}$ المنسوبة إلى جملة إحداثية مبدؤها النقطة $A = (x_0, y_0, z_0)$ ولنحدد دوال قاعدة الأضلاع المرتبطة بها بدلالة دوال قاعدة الأضلاع في جملة الإحداثيات الطبيعية $\xi\eta\zeta$.

بما أنّ دالة التحويل بين العنصر المرجعي $\mathbf{K_0}$ والعنصر $\mathbf{R^e}$ هي دالة خطية فهي تُعطى بالشّكل:

$$(33-6)\ldots\qquad (x, y, z) = B(\xi, \eta, \zeta) = (x_0 + h_x\xi, y_0 + h_y\eta, z_0 + h_z\zeta)$$

ونظراً لكون دالة التحويل خطية فإنّ هذا يجعل الحسابات بسيطة وبالتالي يمكن إنجازها يدوياً وفيما عدا ذلك تكون التكاملات في العبارات أعلاه غاية في الصعوبة لذا نلجأ حينها إلى طرق تكامل عددية كطريقة غاوص التربيعية.

وتكون مصفوفة تحويل جاكوبي من أجل التحويل الخطي B السابق هي:

$$J_B = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_x & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 \\ 0 & 0 & h_z \end{bmatrix} \quad (34\text{–}6)\ldots$$

وبالتالي يُعطى مقلوبها $J_B{}^{-1}$ بالشّكل:

$$J_B{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_z} \end{bmatrix} \quad (35\text{–}6)\ldots$$

وبناءً على ذلك تُعطى دوال قاعدة أضلاع متوازي المستطيلات بالعلاقة:

$$\overrightarrow{\mathrm{W}_j} = J_B{}^{-1}\overrightarrow{W_j^0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_z} \end{bmatrix} \overrightarrow{W_j^0} \quad (36\text{–}6)\ldots$$

فمثلاً تكون w_1:

$$\overrightarrow{\mathrm{W}_1} = J_B{}^{-1}\overrightarrow{W_1^0} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_z} \end{bmatrix} ((1-\eta)(1-\zeta), 0,0)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{8}(\frac{1}{h_x}(1-\eta)(1-\zeta), 0,0)^{\mathrm{T}}$$

وبالمثل نكتب عنصر الحجم بدلالة جملة الإحداثيات الطبيعية $\xi\eta\zeta$:

$$dV = dxdydz = |\det(J)|d\xi d\eta d\zeta \quad (37\text{–}6)\ldots$$

وكما ذكرنا في الفصل الثالث يكون من أجل أي دالة اختيارية $\boldsymbol{f}$:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

ومنه:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = (\frac{1}{h_x}\frac{\partial f}{\partial \xi}, \frac{1}{h_y}\frac{\partial f}{\partial \eta}, \frac{1}{h_z}\frac{\partial f}{\partial \zeta})^{\mathrm{T}} \quad (38\text{–}6)\ldots$$

ننتقل الآن لحساب بعض من عناصر المصفوفتين $\left[A^{(e)}\right]$ و $\left[B^{(e)}\right]$ أما باقي العناصر فيتم إيجادها بطريقة مماثلة تماماً:

$$\nabla \times \overrightarrow{W_1^{(e)}} = \nabla \times {J_B}^{-1}\overrightarrow{W_1^0} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{h_x}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{1}{h_y}\frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{1}{h_z}\frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{h_x}(1-\eta)(1-\zeta) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{W_1^{(e)}} = \frac{1}{8}\left(0, \frac{1}{h_x h_z}(\eta - 1), \frac{-1}{h_x h_y}(\zeta - 1)\right)$$

$$\nabla \times \overrightarrow{W_2^{(e)}} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{h_x}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{1}{h_y}\frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{1}{h_z}\frac{\partial}{\partial \zeta} \\ -\frac{1}{h_x}\eta(\zeta - 1) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\left(0, \frac{-1}{h_x h_z}(1+\eta), \frac{1}{h_x h_y}(\zeta - 1)\right)$$

$$\iiint_{V^e}\left(\nabla \times \overrightarrow{W_1^{(e)}}\right).\left(\nabla \times \overrightarrow{W_1^{(e)}}\right)dV =$$

$$= \frac{h_x h_y h_z}{64(h_x h_z)^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\eta - 1)^2\, d\xi d\eta d\zeta + \frac{h_x h_y h_z}{16\left(h_x h_y\right)^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\zeta - 1)^2\, d\xi d\eta d\zeta$$

$$\iiint_{V^e}\left(\nabla \times \overrightarrow{W_1^{(e)}}\right).\left(\nabla \times \overrightarrow{W_1^{(e)}}\right)dV = \frac{h_y}{64 h_x h_z}\left(\frac{32}{3}\right) + \frac{h_z}{64 h_x h_y}\left(\frac{32}{3}\right) = \frac{h_y}{6 h_x h_z} + \frac{h_z}{6 h_x h_y}$$

وبالمثل:

$$\iiint_{V^e}\left(\nabla \times \overrightarrow{W_1^{(e)}}\right).\left(\nabla \times \overrightarrow{W_2^{(e)}}\right)dV = \frac{h_y}{12 h_x h_z} + \frac{-2h_z}{12 h_x h_y}$$

وهكذا نُوجد جميع عناصر المصفوفة $A^{(e)}$ التي يمكن كتابتها بالشّكل:

$$A^{(e)} = \frac{1}{\mu_r}\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \qquad (39\text{–}6)\ldots$$

حيث:

$$A_{xx} = \frac{h_z}{12 h_x h_y}K_1 + \frac{h_y}{12 h_x h_z}K_2 \quad A_{xy} = {A_{yx}}^T = \frac{-h_z}{12 h_x h_y}K_3$$

$$A_{yy} = \frac{h_x}{12 h_y h_z}K_1 + \frac{h_z}{12 h_y h_x}K_2 \quad A_{xz} = {A_{zx}}^T = \frac{-h_y}{12 h_x h_z}K_3$$

$$A_{zz} = \frac{h_y}{12 h_z h_x}K_1 + \frac{h_x}{12 h_z h_y}K_2 \quad A_{yz} = {A_{zy}}^T = \frac{-h_x}{12 h_y h_z}K_3$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad K_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K_3=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2 & -1\\ -2 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & -2\\ -1 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

أمّا من أجل المصفوفة $B^{(e)}$ فنجد أنّ:

$$\iiint_{V^e}\overrightarrow{W_1^{(e)}}.\overrightarrow{W_1^{(e)}}dV=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(J_B{}^{-1}\overrightarrow{W_1^0}\right).(J_B{}^{-1}\overrightarrow{W_1^0})\,|\det(J)\,|d\xi d\eta d\zeta$$

$$\iiint_{V^e}\overrightarrow{W_1^{(e)}}.\overrightarrow{W_1^{(e)}}dV=\frac{h_xh_yh_z}{64(h_x)^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\eta-1)^2(\zeta-1)^2\,d\xi d\eta d\zeta=\frac{h_yh_z}{h_x}(\frac{2}{9})$$

وبالمثل:

$$\iiint_{V^e}\overrightarrow{W_1^{(e)}}.\overrightarrow{W_2^{(e)}}dV=\frac{h_xh_yh_z}{64(h_x)^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}-\eta(\eta-1)(\zeta-1)^2\,d\xi d\eta d\zeta=\frac{h_yh_z}{h_x}(\frac{1}{9})$$

نتابع فنجد أن:

$$B^{(e)}=\varepsilon_r\begin{bmatrix}B_x & 0 & 0\\ 0 & B_y & 0\\ 0 & 0 & B_z\end{bmatrix}\qquad (40\text{–}6)...$$

حيث:

$$B_x=\frac{h_yh_z}{18h_x}M\quad B_y=\frac{h_xh_z}{18h_y}M\quad B_z=\frac{h_xh_y}{18h_z}M$$

$$M=\begin{bmatrix}4 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

6–2–3–4. التجميع والحل:

لن نتطرق إلى تفاصيل هذه الخطوة إذ أنها أصبحت مألوفة بالنسبة إلينا، إلا أننا ننوّه إلى أن عملية تجميع المصفوفات هنا ستتم بالنسبة للقيم المتوسطة للحقل المماس عند أضلاع العناصر لا عقدها، وبعد أن نتوصل إلى جملة المعادلات الخطية المنشودة يمكن أن نبدّل الشروط الحدية المفروضة كي نحصل على الحل بطريقة العناصر المنتهية.

مثال(6–2):

أوجد باستخدام طريقة العناصر المنتهية حلاً لمعادلة الموجة:

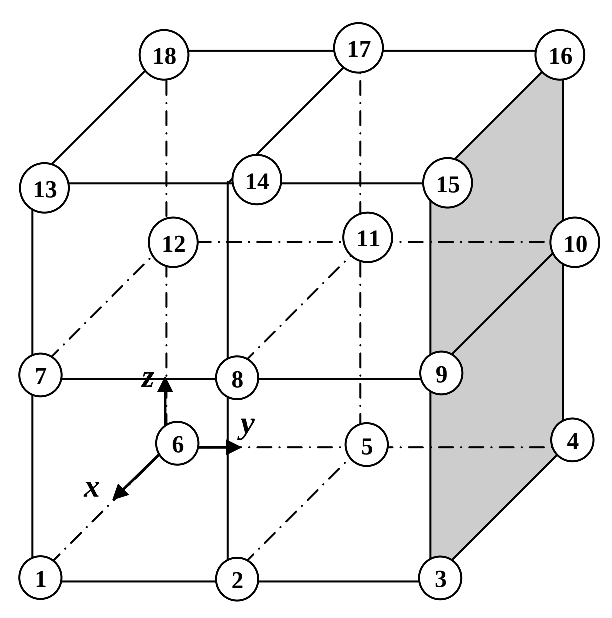
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})-k_0^2\vec{E}=\vec{F}$$

على مكعب الواحدة **V** الموضح بالشّكل(6–7)، وذلك من أجل: $\vec{F}=(1,1,1)$، $k_0=0.25$.

الحل:

إذا فرضنا أنه لا وجود للممانعة الكهربائية على سطح المنطقة **V**، عندئذٍ تكون التكاملات السطحية الموجودة في العلاقة(6−16) جميعها معدومة، وبالتالي تؤول المسألة(6−1) في هذه الحالة إلى الشّكل التالي:

$$\left[A^{(e)}\right]\left\{E^{(e)}\right\} - k_0^2\left[B^{(e)}\right]\left\{E^{(e)}\right\} = \sum_{e=1}^{N_e}\left[F^{(e)}\right]$$



الشّكل(6−7) مكعب الواحدة مجزأ إلى مجموعة من متوازيات المستطيلات

وكي نُوجد الحل نبدأ بتجزئة المنطقة المدروسة إلى أربعة من متوازيات المستطيلات كما هو موضح بالشّكل(6−7)، بحيث تكون الأرقام الموضعية للعقد والأضلاع معطاة بالجداول التالية:

جدول الأرقام الموضعية للعقد:

أرقام العناصر	1	2	3	4	5	6	7	8
***n* (1,*e*)**	1	2	5	6	7	8	11	12
***n* (2,*e*)**	2	3	4	5	8	9	10	11
***n* (3,*e*)**	8	9	10	11	14	15	16	17
***n* (4,*e*)**	7	8	11	12	13	14	17	18

وليكن جدول الأرقام المعمّمة لأضلاع المكعب:

أرقام الأضلاع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
n_s (1,*e*)	1	2	3	4	5	5	6	1	7	8	8	9	9	10	10	11	11
n_s (2,*e*)	2	3	4	5	2	6	1	7	8	2	9	3	10	4	11	5	8

33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	أرقام الأضلاع
18	18	17	17	17	16	16	15	15	14	14	13	7	12	12	11	$n_s\,(1,e)$
13	12	18	14	11	17	10	16	9	15	8	14	13	7	6	12	$n_s\,(2,e)$

بحيث تتوزع أرقام أضلاع كل عنصربالشّكل:

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	s/e
20	19	18	16	17	10	9	8	7	6	5	1	1
17	16	15	14	13	12	11	10	5	4	3	2	2
30	29	28	27	26	25	24	23	17	15	13	11	3
33	23	31	29	30	23	22	21	20	18	17	9	4

نقوم بإدخال هذه الجداول كما يلي:

الأرقام الموضعية للأضلاع

```
NOfLocalEdge[1] = {1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 17, 16, 18, 19, 20};
NOfLocalEdge[2] = {2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17};
NOfLocalEdge[3] = {11, 13, 15, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30};
NOfLocalEdge[4] = {9, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 30, 29, 31, 32, 33};
n = 4; μr = 1; εr = 1; p = {1, 1, 1}; k0 = 0.25; hx = 0.5; hy = 0.25;
hz = 0.25;
```

```
Do[Do[L[i_, e_] := NOfLocalEdge[e][[i]], {i, 12}], {e, n}]
```

$$w_1 = \left\{\frac{1}{8}(1-\zeta)(1-\eta),\ 0,\ 0\right\};\quad w_2 = \left\{\frac{1}{8}(1-\zeta)(1+\eta),\ 0,\ 0\right\};$$

$$w_3 = \left\{\frac{1}{8}(1+\zeta)(1-\eta),\ 0,\ 0\right\};\quad w_4 = \left\{\frac{1}{8}(1+\zeta)(1+\eta),\ 0,\ 0\right\};$$

$$w_5 = \left\{0,\ \frac{1}{8}(1-\zeta)(1-\xi),\ 0\right\};\quad w_6 = \left\{0,\ \frac{1}{8}(1+\zeta)(1-\xi),\ 0\right\};$$

$$w_7 = \left\{0,\ \frac{1}{8}(1-\zeta)(1+\xi),\ 0\right\};\quad w_8 = \left\{0,\ \frac{1}{8}(1+\zeta)(1+\xi),\ 0\right\};$$

$$w_9 = \left\{0,\ 0,\ \frac{1}{8}(1-\eta)(1-\xi)\right\};\quad w_{10} = \left\{0,\ 0,\ \frac{1}{8}(1-\eta)(1+\xi)\right\};$$

$$w_{11} = \left\{0,\ 0,\ \frac{1}{8}(1+\eta)(1-\xi)\right\};$$

$$w_{12} = \left\{0,\ 0,\ \frac{1}{8}(1+\eta)(1+\xi)\right\};$$

دوال قاعدة الأضلاع
بدلالة الإحداثيات الموضعية

```
Jac = {{hx, 0, 0}, {0, hy, 0}, {0, 0, hz}};
Jâc = Inverse[Jac];
```

مصفوفة تحويل جاكوبي

```
W = Table[Null, {12}];
Do[W[[i]] = Jâc . wi, {i, 12}]
```

دوال قاعدة الأضلاع
بدلالة الإحداثيات المعمّمة

```
fin = Table[0, {12}]; FMin = Table[0, {33}];
```

```
FMat[fin_] := Module[{k = fin},
  Do[k[[i]] = N[∫_{-1}^{1} ∫_{-1}^{1} ∫_{-1}^{1} Det[Jac] (W[[i]].p) dξ dη dζ], {i, 12}]; Return[k]]
```

```
MergeFMat[FMat_, eftab_, FMin_] := Module[{i, ii, F = FMin, L = Length[eftab]},
  For[i = 1, i ≤ L, i++, ii = eftab[[i]]; F[[ii]] = FMat[[i]]]; Return[F]];
```

```
Do[MF[e_] := MergeFMat[FMat[fin], Table[L[i, e], {i, 12}], FMin], {e, n}];
Do[Print["F̄[", e, "]=", MatrixForm[MF[e]]], {e, n}]
```

المصفوفة F الموسعة
لكل عنصر

F̄[1]=	F̄[2]=	F̄[3]=	F̄[4]=
0.0625	0	0	0
0	0.0625	0	0
0	0.0625	0	0
0	0.0625	0	0
0.0625	0.0625	0	0
0.0625	0	0	0
0.0625	0	0	0
0.125	0	0	0
0.125	0	0	0.0625
0.125	0.125	0	0
0	0.125	0.0625	0
0	0.125	0	0
0	0.125	0.0625	0
0	0.125	0	0
0	0.125	0.0625	0
0.125	0.125	0	0
0.125	0.125	0.0625	0.0625
0.125	0	0	0.0625
0.125	0	0	0
0.125	0	0	0.0625
0	0	0	0.125
0	0	0	0.125
0	0	0.125	0.125
0	0	0.125	0
0	0	0.125	0
0	0	0.125	0
0	0	0.125	0
0	0	0.125	0
0	0	0.125	0.125
0	0	0.125	0.125
0	0	0	0.125
0	0	0	0.125
0	0	0	0.125

```
LF = εr Σ_{e=1}^{n} MF[e];
Print["F=", MatrixForm[LF]]
```

المصفوفة F للجملة

```
LF = ε_r Σ_{e=1}^{n} MF[e]; Print["F=", LF]

F={0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.0625, 0.125, 0.0625, 0.0625, 0.125, 0.1875,
  0.25, 0.1875, 0.125, 0.1875, 0.125, 0.1875, 0.25, 0.375, 0.1875, 0.125, 0.1875, 0.125,
  0.125, 0.25, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.25, 0.25, 0.125, 0.125, 0.125}
```

```
K = Table[0, {i, 12}, {j, 12}];

K1 = {{2, -2, 1, -1}, {-2, 2, -1, 1}, {1, -1, 2, -2}, {-1, 1, -2, 2}};
K2 = {{2, 1, -2, -1}, {1, 2, -1, -2}, {-2, -1, 2, 1}, {-1, -2, 1, 2}};
K3 = {{2, 1, -2, -1}, {-2, -1, 2, 1}, {1, 2, -1, -2}, {-1, -2, 1, 2}};
M = {{4, 2, 2, 1}, {2, 4, 1, 2}, {2, 1, 4, 2}, {1, 2, 2, 4}};

Mergematrix[EM_, eftab_, k_] := Module[{i, j, ii, jj, s = k, L = Length[eftab]},
   For[i = 1, i ≤ L, i++, ii = eftab[[i]];
    For[j = 1, j ≤ L, j++, jj = eftab[[j]]; s[[ii, jj]] = EM[[i, j]]]];
   Return[s]];

Mergeelementmatrix[EM_, eftab1_, eftab2_, k_] :=
  Module[{i, j, ii, jj, s = k, L = Length[eftab1], M = Length[eftab2]},
   For[i = 1, i ≤ L, i++, ii = eftab1[[i]];
    For[j = 1, j ≤ M, j++, jj = eftab2[[j]]; s[[ii, jj]] = EM[[i, j]]]];
   Return[s]];
```

$$c_1 = \frac{h_z}{12\, h_x\, h_y} K_1 + \frac{h_y}{12\, h_x\, h_z} K_2;\quad c_2 = \frac{h_x}{12\, h_y\, h_z} K_1 + \frac{h_z}{12\, h_x\, h_y} K_2;$$

$$c_3 = \frac{h_y}{12\, h_x\, h_z} K_1 + \frac{h_x}{12\, h_y\, h_z} K_2;\quad c_4 = \frac{-h_z}{12\, h_x\, h_y} K_3;$$

$$c_5 = \frac{-h_y}{12\, h_x\, h_z} K_3;\quad c_6 = \frac{-h_x}{12\, h_y\, h_z} K_3;$$

$$d_1 = \frac{h_y\, h_z}{18\, h_x} M;\quad d_2 = \frac{h_x\, h_z}{18\, h_y} M;$$

$$d_3 = \frac{h_x\, h_y}{18\, h_z} M;$$

```
A1 = Mergeelementmatrix[c1, {1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}, K];
A2 = Mergeelementmatrix[c2, {5, 6, 7, 8}, {5, 6, 7, 8}, K];
A3 = Mergeelementmatrix[c3, {9, 10, 11, 12}, {9, 10, 11, 12}, K];
A4 = Mergeelementmatrix[c4, {1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, K];
A5 = Mergeelementmatrix[c4, {5, 6, 7, 8}, {1, 2, 3, 4}, K];
A6 = Mergeelementmatrix[c5, {1, 2, 3, 4}, {9, 10, 11, 12}, K];
A7 = Mergeelementmatrix[c5, {9, 10, 11, 12}, {1, 2, 3, 4}, K];
A8 = Mergeelementmatrix[c6, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12}, K];
A9 = Mergeelementmatrix[c6, {9, 10, 11, 12}, {5, 6, 7, 8}, K];
B1 = Mergeelementmatrix[d1, {1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4}, K];
B2 = Mergeelementmatrix[d2, {5, 6, 7, 8}, {5, 6, 7, 8}, K];
B3 = Mergeelementmatrix[d3, {9, 10, 11, 12}, {9, 10, 11, 12}, K];
```

المصفوفتان A,B لكل عنصر

```
A = Sum[A_i, {i, 1, 9}]; B = Sum[B_i, {i, 1, 3}];
```

```
d = Table[0, {i, 33}, {j, 33}];
```

```
H1 = Mergematrix[A, NOfLocalEdge[1], d];
H2 = Mergematrix[A, NOfLocalEdge[2], d];
H3 = Mergematrix[A, NOfLocalEdge[3], d];
H4 = Mergematrix[A, NOfLocalEdge[4], d];
U1 = Mergematrix[B, NOfLocalEdge[1], d];
U2 = Mergematrix[B, NOfLocalEdge[2], d];
U3 = Mergematrix[B, NOfLocalEdge[3], d];
U4 = Mergematrix[B, NOfLocalEdge[4], d];
```

المصفوفتان الموسعتان
A,B لكل عنصر

$H = \frac{1}{\mu_r} \sum_{i=1}^{n} N[H_i]; \; U = \epsilon_r \sum_{i=1}^{n} N[U_i];$

المصفوفتان الموسعتان
A,B للجملة

```
h = LinearSolve[H - k0^2 U, LF]

{-16.0001 , -16. , -16. , -16. , -15.9999 , -16. , -16.0001 , -8.888 , -8.88096 ,
 -8.88784 , -8.88092 , -8.88785 , -8.88087 , -8.90936 , -8.88118 , -8.90945 , -8.88109 ,
 -8.88125 , -8.90936 , -8.88133 , -7.99999 , -8.00009 , -8.00002 , -8.0001 , -8.00004 ,
 -8.00008 , -7.9998 , -8.00007 , -7.99982 , -8.00005 , -8.00011 , -7.99985 , -8.00008 }
```

قيم متغير الحقل عند الأضلاع

نلاحظ أنّ عدد المجاهيل في هذه الحالة هو 33 مجهولاً في حين يكون عدد المجاهيل في حال استخدامنا دوال قاعدة العقد 18 مجهولاً، إلا أنّ ذلك لا يعني لأن نستغني عن استخدام دوال قاعدة الأضلاع، إذ أنّ استخدامها ضروري كما ذكرنا في الحالات التي يؤدي فيها استخدام دوال قاعدة العقد إلى أنماط زائفة.

نتائج وتوصيات ومقترحات

تحتلّ معادلات ماكسويل مكانةً عظيمةً بين العلوم الفيزيائيّة، إذ أنّها تمثّل محوراً أساسيّاً في سلوك كثير من الظواهر الكهرطيسيّة التي نصادفها كلّ يوم، ونظراً لأنه يصعب التعامل مع شكل هذه المعادلات بطرقٍ تحليليةٍ وخصوصاً عندما تُدرس في أوساط معقدة، فقد اتجهت معظم الطرق التي عملت على حلّها إلى تبسيط شكل المسألة، إلا أنّ طريقة العناصر المنتهية سلكت منحى مُغايراً إذ أنّها احتفظت بتعقيدات المسألة، وركّزت على المنطقة نفسها، حيث اعتمدت على تجزئة المنطقة إلى مجموعة من العناصر البسيطة، ومن ثمّ إيجاد دالة تقريبية على كل منطقة جزئية يتم بعدها إيجاد الحل التقريبي للمسألة المفروضة على كامل المنطقة بالاستفادة من الحلول السابقة.

هذا وفي ضوء دراستنا لحل معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية يمكن أن نستخلص النتائج التالية:

١. تتدرج طريقة العناصر المنتهية وفق خطوات أساسيّة وهي:
إيجاد الشكل الضّعيف، التجزئة، إيجاد صيغة العنصر، التعميم، دمج معادلات العناصر، تطبيق الشّروط الحدّيّة، حل جملة المعادلات الخطيّة الناتجة.

٢. لا بدّ من استخدام أنواع مختلفة من الجمل الإحداثية في طريقة العناصر المنتهية وهي:
جملة الإحداثيّات الموضعيّة: لإيجاد المصفوفات العنصرية.
جملة الإحداثيّات الطّبيعية: لتبسيط التكاملات.
جملة الإحداثيّات المعممة: للحصول على جملة المعادلات الممثلة للمنطقة المدروسة.

٣. على الرغم من أنّ التكاملات الناتجة عن استخدام طريقة العناصر المنتهية غالباً ما تكون صعبةً، إلا أنّه يمكن التغلب على هذه المشكلة باستخدام دالة تحويل تربط دوال القاعدة العنصر المنتهي المنسوب إلى جملة الإحداثيات الطّبيعية بدوال القاعدة المقابلة لها في جملة الإحداثيّات المعممة. ونظراً لأهميّة هذه الفكرة فقد قمنا بعرض خوارزميات توضّح كيفية التحويل بين دوال قاعدة الأضلاع في جملتي الإحداثيّات الطبيعيّة والمعممة، ووضعنا من أجلها برامج تساعد في إنجاز هذه العمليّة باستخدام برنامج ***Mathematica*** **[20]**.

٤. إنّ زيادة عدد العناصر المستخدمة في تجزئة المنطقة يزيد من دقّة الحل العددي الناتج، إلا أنّ ذلك يزيد في الوقت نفسه من كلفة الخوارزميّة المتّبعة في الحل.

٥. إنّ استخدام دوال قاعدة العقد في حل معادلات الموجة الناتجة عن معادلات ماكسويل في حالة **(1-D)** أعطانا نتائج جيّدة جداً على الرغم من أنّ عدد العناصر كان صغيراً، واستطعنا توضيح ذلك من خلال الدّراسة التحليليّة والبيانيّة للنتائج.

٦. أمّا في حالة **(2-D)** فقد استخدمنا أيضاً دوال قاعدة العقد وعرضنا أمثلةً عليها باستخدام عناصر مثلثية ومستطيلة، فحصلنا على نتائج كانت أقلّ دقة من حالة **(1-D)** إلا أنّها تُعتبر جيدة إذا ما قُورنت بعدد العناصر المستخدمة في التجزئة والإمكانات المتاحة، إذ غالباً ما يُستخدم في مثل هذه الحالات تجزئات يصل عدد العناصر المستخدمة فيها إلى الآلاف، ولكنّ ذلك يتطلّب بالمقابل أجهزةً متطورةً ذات معالجاتٍ عالية السرعة وذاكرةٍ كبيرة.

٧. إنّ دوال قاعدة العقد لا تفي بالمطلوب دائماً وذلك لأنّ المسائل الكهرطيسيّة ذات طبيعية شعاعيّة لا تتوافق مع طبيعة دوال قاعدة العقد التي تعتمد على إيجاد قيمة الحقل عند العقد التي يمكن للحقل ألا يكون معرفاً عندها كالزوايا، لذا عرضنا حلاً لمعادلات ماكسويل باستخدام دوال قاعدة الأضلاع في **(3-D)** وتوصلنا إلى جملة من المعادلات لها شكل بسيط، واستطعنا باستخدام برنامج ***Mathematica*** أخذ أمثلة تطبيقية عليها.

ومن خلال دراستنا لحلّ معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية تبرز بعض التساؤلات وهي:

- استخدمنا خلال دراستنا نوعين من دوال القاعدة (دوال قاعدة العقد ودوال قاعدة الأضلاع)، فهل ثمّة أنوعٌ أخرى من دوال القاعدة يمكن استخدامها للحصول على حلول عددية أفضل لمعادلات ماكسويل؟
- هل يمكن توظيف دوال قاعدة الأضلاع في حل معادلات أخرى كمعادلات نفير- ستوكس أو غيرها؟
- هل يزيد حل معادلات ماكسويل بطريقة العناصر المنتهية التكيفية من تسارع الحل العددي للوصول إلى الحل الفعلي وإلى أي حد؟
- إلى أيّة درجة يمكن أن يزيد استخدام عناصر تربيعية من دقّة الحل العددي الناتج؟

– هل يمكن أن نحصل على نتائج أفضل باستخدام برامج أو لغات برمجة أخرى غير ***Mathematica*** مثل (***Java***، ***Abaqus***، ...)؟

– ما هي الطرق الأنسب لحل جملة المعادلات الخطيّة الناتجة عن طريقة العناصر المنتهية؟

وهكذا يمكن أن تُعدّ هذه التساؤلات عناوين لدراساتٍ جديدةٍ في ميدان معادلات ماكسويل والعناصر المنتهية.

دليل المصطلحات العلميّة

- A -	
Accuracy	دقة
Adaptive Method	طريقة تكيفية
Approximation	تقريب
Area Coordinates	إحداثيات المساحة
Assembly	تجميع
- B -	
Band Matrix	مصفوفة شريطية
- C -	
Capacitance	سعة
Cavity Problem	مسألة الفجوة
Centroidal Coordinates	الإحداثيات المركزية
Compact	متراصة
Compatibility	توافقية
Complete Polynomial	حدودية تامة
Conductor	ناقل
Convergence	تقارب
Cross Section	مقطع عرضي
Current	تيار
- D -	
Degrees of freedom	درجات حرية
Density	كثافة
Dependent	مرتبط
Dielectric	عازل

Dimentionless Parameters	معاملات لابعدية
Discretization	تجزئة
Distribution	توزيع
Divergence	تباعد
Domain	منطقة
Dual	ثنوي
- E -	
Edge	ضلع
Edge Based Elements	عناصر قاعدة الأضلاع
Eigenvalue	قيمة ذاتية
Electromagnetic	كهرطيسية
ElectroStatic	الاستقرار الكهربائي
Element	عنصر
- F -	
Finite	منتهي
Functional	دالي
- G -	
Geometric	هندسي
Global	معمم
Gradient	تدرج
- H -	
Harmonic	متوافق
Hexahedron	متوازي المستطيلات
Homogeneous	متجانس
- I -	
Impedance	ممانعة

Independent	مستقل
Interpolation Function	دالة استيفاء
Isotropy	تجانس- تناحي
- L -	
Length Coordinates	إحداثيات الطول
Linear Combination	تركيب خطي
Local	موضعي- محلي
- M -	
Magnetostatic	الاستقرار المغناطيسي
Mesh	شبكة
Multi-Index	متعدد الأدلة
- N -	
Natural Coordinates	الإحداثيات الطبيعية
Node	عقدة
Node Based Elements	عناصر قاعدة العقد
Norm	نظيم
Normal	ناظمي
- P -	
Permeability	نفاذية
Permittivity	سماحية
Polarization	استقطاب
Potential	كمون
- Q -	
Quadratic	تربيعي
- R -	
Radiation	إشعاع

Rectangular Element	عنصر مستطيل
Reflection	انعكاس
- S -	
Scattering	تشتت– تبعثر– انتشار
Shape Function	دالة الشكل
Singular Matrix	مصفوفة شاذة
Sparse Matrix	مصفوفة متناثرة
Spurios Modes	أنماط زائفة
Stability	استقرار
Support	دعامة
Symmetric	متناظر
Symmetry	تناظر
- T -	
Tangential	مماسي
Tesselation	تجزئة
Tetrahedron	رباعي وجوه
Trace	أثر
Transmission	نقل
Triangular Element	عنصر مثلثي
Trilinear	ثلاثي الخطية
- U -	
Unisolved Element	عنصر ذو حل وحيد
Unit Cube	مكعب الواحدة
Unit square	مربع الواحدة
- V -	
Variational Approach	طريقة تغييرية

Volume Coordinates	إحداثيات الحجم
Vacuum	الخلاء
- W -	
Wave Equation	معادلة الموجة
Waveguide	دليل موجي
Wavenumber	عدد الموجة
Weak Form	شكل ضعيف
Weight Function	دالة وزن
Weighted Residuals	البواقي الموزونة

References

1. **J.P.A. Bastos and N.Sadowski, "Electromagnetic Modeling By Finite Element Methods", Marcel Dekker Inc., 2003.**

2. **D. Braess, "Finite Elements", 2thed, Cambridge University Press, 2002.**

3. **A. Carlos, "Introduction To Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace structures University of Colorado, 2004.**

4. **Z. Chen, "Finite Element Methods and Their Applications", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.**

5. **D. Harutynyan, "Adaptive Vector Finite Element Methods for The Maxwell's Equations", Dissertation to obtain the degree of doctor at the university of Twente, 2007.**

6. **T. J. R. Hughes, "The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice- Hall, Inc, 1987.**

7. **D. V. Hutton, "Fundamentals of Finite Element Analysis", McGraw-Hill Professional, 2004.**

8. **S. Kesavan, "Topics In Functional Analysis And Applications", John Wiley & Sons, NY, 1989.**

9. **E. Madenci and I. Guven, "The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®", Springer, 2006.**

10. **P. Monk, "Finite Element Methods for Maxwell's Equations", Clarendon Press, Oxford, 2003.**

11. **J. N. Reddy, "An Introduction To The Finite Element Method", McGraw-Hill, NY, 1986.**

12. **K. C. Rockey, H. R. Evans, D. W. Griffiths, and D.A. Nethercot, "The Finite Element Method A Basic Introduction", Crosby Lockwood Staples London, 1974.**

13. **I.M. Smith, and D.V. Griffits, "Programming The Finite Element Method", 4th ed, John Wiley & Sons, Ltd, 2006.**

14. **P. SOLIN, " Partial Differential Equations and The Finite Element Method", John Wiley & Sons, 2006.**

15. **J. L. Volakis, A. Chatterjee, and L. C. Kempel, "Finite Element Method for Electromagnetic, Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications", IEEE Antennas & Propagation Society, Sponsor, Oxford, 1998.**

16. **D. A. White, "Discrete Time Vector Finite Element Methods for Solving Maxwell's Equations On 3D Unstructured Grids", PhD Thesis, Lawrence Livermore National Laboratory, 1997.**

17. **O. C. Zienkiewics, and R. L. Taylor, "The Finite Element Method", Vol.1 The Basis, 5th ed, Butterworth- Heinemann, Oxford, 2000.**

18. د. مها النبهان، "طريقة كالركين المستمرة والموزونة لحل مسائل القيم الحدّيّة الابتدائية"، جامعة وسكانسن- ميلووكي، 1997.

19. د. برلنت مطيط، وندى السيّد حسن، "تطبيق خوارزميات طريقة الصلابة المباشرة على البنى الشبكية"، مجلة جامعة بحوث حلب، العدد(58)، 2008.

20. د. برلنت مطيط، وندى السيّد حسن، "بناء خوارزمية لدوال قاعدة أضلاع العناصر المنتهية في الإحداثيات الطبيعية والمعممة"، مجلة بحوث جامعة حلب، العدد(60)، 2008.